

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

© С. С. Жуматов

anar@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Вырожденная система управления приводится к эквивалентной и канонической формам. С помощью построения функции Ляпунова устанавливаются достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия относительно вектор-функции ω .

Одним из важных классов неявных систем являются модели вида

$$H(t, x(t))\dot{x}(t) = F(t, x), \quad H \in R^{s \times n}, \quad x \in R^n, \quad F \in R^s, \quad t \in I = (\alpha, \beta). \quad (1)$$

Такие системы линейных уравнений, не разрешенные относительно старшей производной или алгебро-дифференциальные системы, важные для приложений, как экономические системы управления, теория электрических цепей и т. д., изучались многими авторами. Обзор этих работ приведен в [1]. В этих работах доказаны существование и единственность решений, исследованы приводимость систем с переменными матрицами к системам с постоянными матрицами, вырожденные системы приведены к различным каноническим видам, рассматривались вопросы их эквивалентности системам с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами, построены алгоритмы решения вырожденных линейных систем. В настоящей работе исследуется задача установления эквивалентности и устойчивости вырожденных систем. Полученные результаты являются распространением некоторых результатов полученных в [2, 3], на нелинейные системы. К системе типа (1) приводятся также задача построения систем по заданному многообразию. Пусть дифференциальное уравнение [4]

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2)$$

описывает динамические процессы систем автоматического управления, где $x \in R^n$, $f = (t, x) \in R^n$ — вектор-функция состояния системы управления, обеспечивающая существование и единственность решений уравнений (2) на интервале $t \in I = (\alpha, \beta)$ и обладающая $n - s$ -мерным гладким интегральным многообразием $\Omega(t)$, определяемым векторным уравнением $\omega(t, x) = 0$, $\omega \in R^s$, $s \leq n$. В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (2) имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} f(t, x) = F(t, x, \omega), \quad (3)$$

где $F(t, x, 0) \equiv 0$ — функция Еругина [5].

Рассмотрим неявную дифференциальную систему, возникающей при построении систем по заданному многообразию $\Omega(t)$:

$$H(t, x(t))\dot{x}(t) = f(t, x), \quad H \in R^{s \times n}, \quad x \in R^n, \quad \omega \in R^s, \quad s \leq n, \quad t \in I = (\alpha, \beta). \quad (4)$$

где $H(t, x(t)) = \partial \omega / \partial x$, $f(t, x) = F(t, \omega(t, x)) - \partial \omega / \partial t$, α, β — конечные или бесконечные числа, $F(t, 0) \equiv 0$ — функция Еругина, а многообразие $\Omega(t)$ задано в линейном виде $\omega(t, x) \equiv H_1(t)x = 0$, где $H_1(t) \in R^{s \times n}$ — заданная непрерывная матрица. Нашей целью является установление достаточных условий устойчивости программного многообразия вырожденных систем. Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение матрицы $H(t)$ при $s = n$ имеет r нулевых корней.

Выбирая функцию Еругина линейной относительно вектор-функции ω $F(t, x, \omega) = -A_2(t)\omega$ и принимая во внимание линейность заданного многообразия, систему (4) преобразуем к виду

$$H(t)\dot{x} = -A(t)x - q(t), \quad (5)$$

где $H(t) \in R^{s \times s}$, $A(t) = A_2(t)H_1(t)$, $q(t) = \partial\omega/\partial t$.

Введём оператор $L(t) = -A(t) - H(t)d/dt$.

Теорема 1. Пусть $A(t)$, $H(t) \in C^{2m}(\alpha, \beta)$, $\text{rank } H(t) = s - r$ и матрица $H(t)$ имеет в интервале (α, β) полный жорданов набор относительно оператора $L(t)$, который складывается с r клеток порядка $l_1, \dots, l_r$ при $\max l_i = m$. Тогда существуют неособые при всех $t \in (\alpha, \beta)$ $(s \times s)$ -матрицы $\widetilde{M}(t)$, $G_1(t) \in C^1(\alpha, \beta)$ такие, что умножением на $\widetilde{M}(t)$ и заменой $x = G_1(t)y$ система (5) приводится к центральной канонической форме

$$\left\| \begin{array}{cc} E_{s-l} & 0 \\ 0 & J \end{array} \right\| \dot{y} = \left\| \begin{array}{cc} M(t) & 0 \\ 0 & E_l \end{array} \right\| y + \widetilde{M}(t)q(t), \quad (6)$$

где $l = l_1 + \dots + l_r$, $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r)$, J_j — жордановы клетки порядка l_j $j = \overline{1, r}$.

Вместе с системой (5) рассмотрим систему аналогичного вида

$$P(t)\dot{y} + Q(t)y = 0, \quad t \in I, \quad (7)$$

где P и Q — абсолютно непрерывные $s \times s$ матрицы, ограниченные на промежутке I , а детерминант матрицы P равен нулю для всех $t \in I$.

Теорема 2. Системы (5) и (7) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая матрица Ляпунова L , что для любой фундаментальной матрицы Y решений системы (7) существует фундаментальная матрица X решений системы (5), для которой имеет место представление $X = LY$.

Теперь рассмотрим вопрос о построении устойчивых систем управления по заданному программному многообразию

$$\dot{x} = f(t, x) - B(t)\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \quad (8)$$

где $B(t) \in R^{s \times k}$ — непрерывная, $P \in R^{s \times k}$ — постоянная матрицы, φ , $\sigma \in R^k$ — векторы, а нелинейная вектор-функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет локальным условиям квадратичной связи и дифференцируема по σ . Тогда с учетом, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным и для системы (8), система (5) будет иметь вид

$$H(t)\dot{x} = -A_2(t)\omega - q(t) - H(t)B(t)\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega, \quad (9)$$

Система (9) приводится к центральной канонической форме и путем построения для нее функции Ляпунова получено достаточное условие абсолютной устойчивости относительно вектор-функции ω .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуматов С. С. Центральная каноническая форма и устойчивость вырожденных систем управления // Математический журнал. Алматы. 2003. Т. 3, № 3. С. 48–54.
2. Яковец В. П. Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журнал. Киев. 1997. Т. 49, № 9. С. 1278–1296.
3. Мазаник С. А. О линейных дифференциальных системах, эквивалентных относительно обобщенного преобразования Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1619–1622.
4. Майгарие Б. Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата, 1981. 316 с.
5. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, в. 16. С. 659–670.