Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 158–159

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© А. Х. Жураев

apakov.1956@mail.ru

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - U_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x;y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, где $b = const > 0$.

Задача. Найти непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую в области D уравнению (1) краевыми условиями

$$u\,(x,0) = u\,(x,b) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{2}$$

$$u\,(0,y) = \varphi_1\,(y)\,, u_x\,(a,y) = \varphi_2\,(y)\,, u_{xx}\,(a,y) = \varphi_3\,(y)\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{3}$$

где $\varphi_i\,(y) \in C'\,[0,b]$, $\varphi_i\,(0) = \varphi_i\,(b) = 0$, $i = 1,2,3.$

Единственность решения задачи доказывается так же, как в работе [1] Следуя работе [2], имеем решения вспомогательной задачи (1)–(2) в виде:

$$U\,(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[{}_{1n}e^{-k_nx} + e^{\frac{1}{2}k_nx}\left({}_{2n}\cos\nu_nx + {}_{3n}\sin\nu_nx\right)\right]\sin\frac{\pi n}{b}y. \tag{4}$$

С помощью условий (3) получим систему алгебраических уравнений для определения C_{in} $(i = 1,2,3)$:

$$\begin{cases} A_{1n} = C_{1n} + C_{2n}, \\ A_{2n} = -k_n\,C_{1n}e^{-k_na} + k_ne^{\frac{1}{2}k_na}\,\left[C_{2n}\cos\,\left(\nu_na + \frac{\pi}{3}\right) + C_{3n}\sin\,\left(\nu_na + \frac{\pi}{3}\right)\right], \\ A_{3n} = k_n^2\,C_{1n}e^{-k_na} - k_ne^{\frac{1}{2}k_na}\,\left[C_{2n}\cos\,\left(\nu_na - \frac{\pi}{3}\right) + C_{3n}\sin\,\left(\nu_na - \frac{\pi}{3}\right)\right], \end{cases}$$

где $A_{in} = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \varphi_i\,(\eta)\sin\frac{\pi n}{b}\eta d\eta$, $(i = 1,2,3)$.

Находим определитель этой системы:

$$\Delta = \sqrt{3}k_n^3e^{k_na}\left(\frac{1}{2} + e^{-\frac{3}{2}k_na}\cos\nu_na\right) \neq 0.$$

Подставив найденные значение C_{in} в (4), имеем:

$$U\,(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}D_{1n}\,(x) + A_{2n}D_{2n}\,(x) + A_{3n}D_{3n}\,(x)\right]\sin\frac{k\pi}{b}y, \tag{5}$$

где

$$D_{1n}\,(x) = \frac{\sqrt{3}k_n^3}{\Delta}\left[\frac{1}{2}e^{k_n(a-x)} + e^{-\frac{1}{2}k_n(a-x)}\cos\left(\nu_n\,(a-x)\right)\right],$$

$$D_{2n}(x)=\frac{k_n^2}{\Delta}\left[e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a-\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin\nu_n x-e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n(a-x)-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$D_{3n}(x)=\frac{k_n}{\Delta}\left[e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a+\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin\nu_n x-e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n(a-x)+\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Равномерная сходимость ряда (5) доказывается с помощью интегрального признака Коши.

Вычисляя производные, получим

$$D_{1n}^{(p)}(x)=\frac{\sqrt{3}k_n^{p+3}}{\Delta}\left[(-1)^p\frac{1}{2}e^{k_n(a-x)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(a-x)}\cos\left(\nu_n(a-x)-p\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$D_{2n}^{(p)}(x)=\frac{k_n^{p+2}}{\Delta}\left[(-1)^p e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a-\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin(\nu_n x+p\frac{\pi}{3})-\right.$$
$$\left.e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n(a-x)-(p+1)\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$D_{3n}^{(p)}(x)=\frac{k_n^{p+1}}{\Delta}\left[(-1)^p e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a+\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin(\nu_n x+p\frac{\pi}{3})-\right.$$
$$\left.e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n(a-x)+\frac{\pi}{3}-p\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Функции $D_{in}^{(p)}(x)$ при $p=3$ удовлетворяют тождествам

$$D_{in}^{(3)}(x)+\lambda_n D_{in}(x)=0,\quad i=1,2,3$$

Для функции $D_{in}(x)$, $i=1,2,3$, имеет место равенство

$$\begin{pmatrix}D_{1n}(0) & D'_{1n}(a) & D''_{1n}(a)\\ D_{2n}(0) & D'_{2n}(a) & D''_{2n}(a)\\ D_{3n}(0) & D'_{3n}(a) & D''_{3n}(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Подставив значения A_{in} в ряд (5) имеем решения задачи в виде

$$U(x,y)=\frac{2}{b}\int_0^b R_1(x,y,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta+\frac{2}{b}\int_0^b R_2(x,y,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta+\frac{2}{b}\int_0^b R_3(x,y,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta,$$

где

$$R_i(x,y,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}D_{in}(x)\sin\frac{\pi n}{b}y\sin\frac{\pi n}{b}\eta.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апаков Ю. П.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. // Материалы III международный конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”. Нальчик, 5–8 декабря 2006 г. С. 37–39.
2. *Иргашев Б. Ю., Апаков Ю. П.* Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // Уз. МЖ. 2006. № 2. С. 44–51.