Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 546–547

УДК 519.642

ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА В ТЕОРИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© А. С. Апарцин

apartsyn@isem.sei.irk.ru

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

Одним из универсальных подходов к математическому моделированию нелинейных динамических систем типа черного ящика является представление отклика системы $y(t)$ на входное возмущение $x(t)$ в виде полинома Вольтерра:

$$y(t) = \sum_{m=1}^{N} \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

Если ядра K_m, $m = \overline{1, N}$, уже идентифицированы каким-либо способом и требуется по заданному $y(t)$ определить соответствующий вход $x(t)$, то (1) является N-линейным относительно $x(t)$ интегральным уравнением Вольтерра I рода. Для приложений особый интерес представляют би- и трилинейные уравнения (в (1) $N = 2, 3$).

Хорошо известна роль экспоненциальной функции в теории линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода (в (1) $N = 1$). В частности, при условии $y(0) = 0$ и $K_1(t, t) \neq 0$ $\forall\, t \in [0, T]$, для достаточно гладких исходных данных с ее помощью устанавливаются корректность этой задачи на паре $(C_{[0,T]}, C^{(1)}_{[0,T]})$ $\forall\, T < \infty$, оценивается норма обратного оператора и т.д.

Оказывается, при исследовании полилинейных уравнений аналогичная роль принадлежит производной от функции Ламберта $W(z)$, являющейся обратной к функции $z = W \exp W$ (см., например, [1]). Так, с помощью двух вещественных ветвей функции Ламберта можно получить максимально широкую гарантированную область существования непрерывного решения (1) (такое решение существует, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности $t = 0$), а также неулучшаемые мажоранты для специальных классов нелинейных интеральных неравенств как точные решения соответствующих уравнений. Подобные уравнения названы в [4] мажорантными для (1).

В случае произвольного N вместо точного решения $x^*(t)$ мажорантного уравнения удается найти лишь его оценку сверху. Приведем одну из таких оценок, когда в (1) $K_1 = 1$, $K_i = \text{const}$, $|K_i| \le \dfrac{1}{i!}$, $i = \overline{2, N}$, $F = \max\limits_{0 \le t \le T} |y'(t)|$. Мажорантное уравнение Вольтерра II рода имеет при этом вид

$$x(t) = F + \sum_{i=2}^{N} \frac{x(t)}{(i-1)!} \left(\int_0^t x(s) ds \right)^{(i-1)}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *При* $T < \dfrac{2 \ln 2 - 1}{F}$

$$x^*(t) \le -\frac{F}{2} \left(\frac{W(-\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{1-Ft}{2}})}{1 + W(-\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{1-Ft}{2}})} - 1 \right), \quad t \in [0, T],$$

где W — главная вещественная ветвь функции Ламберта.

Результаты, изложенные в докладе, развивают исследования, начатые в [2–4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00336.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., and Jeffrey D. J.* Lambert's W function in Maple // The Maple Technical Newsletter. 1993. № 9.
2. *Апарцин А. С.* О билинейных уравнениях Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. 2004. № 2(8). С. 20–28.
3. *Апарцин А. С.* О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 118–125.
4. *Апарцин А. С.* К теории полилинейных уравнений Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 1(9). С. 5–27.