Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 541–542

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.676

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ, ЗАДАННОЙ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© Т. А. Аверина

ata@osmf.sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Рассмотрим процесс $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$, где $s(t)$ — дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, S\}$, S — число структур системы, а $\mathbf{y}(t)$ — n-мерный непрерывный случайный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) в форме Стратоновича [1]

$$d\mathbf{y}(t) = a^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \tag{1}$$

или в эквивалентной форме Ито

$$d\mathbf{y}(t) = f^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{2}$$

Здесь $t \in [t_0, T]$; $\mathbf{w}(t)$ – m-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $\mathbf{y}_0$; $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$, $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$ — вектор-функции размера n, связанные соотношением [1]

$$f_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) = a_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{m} \frac{\partial \sigma_{ij_2}^{(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial y_{j_1}} \sigma_{j_1 j_2}^{(l)}(t, \mathbf{y}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$ — матричная функция размера $n \times m$; l — номер структуры, $l = 1, 2, \ldots, S$.

Вероятность перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяет условию [1]

$$P\big(s(t + \Delta t) = r \mid s(t) = l,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}\big) = \nu_{lr}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \quad l, r = 1, 2, \ldots, S, \quad l \neq r,$$

$$P\big(s(t + \Delta t) = l \mid s(t) = l,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}\big) = 1 - \nu_{ll}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), s(t_0) = s_0, \tag{3}$$

где интенсивности перехода $\nu_{lr}(t, \mathbf{y}) \geq 0$, $\nu_{ll}(t, \mathbf{y}) = \sum_{r=1 \neq l}^{S} \nu_{lr}(t, \mathbf{y})$. Предполагается, что в моменты переключения траектории процесса $\mathbf{y}(t)$ остаются непрерывными, т.е. рассматривается случай точного восстановления реализаций.

Задача анализа систем со случайной структурой (1), (2) (*или* (2), (3)), состоит в нахождении ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния по заданным функциям $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$ (или $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$), $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$, интенсивностям $\nu_{lr}(t, \mathbf{y})$ и ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$; $l, r = 1, 2, \ldots, S$.

Наряду с нахождением функций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ можно рассматривать задачу нахождения маргинальных плотностей вероятности $p(x)$ и моментных характеристик вектора состояния (в том числе взвешенных и условных) в любой момент времени $t \in [t_0, T]$, а также задачу определения вероятностных характеристик времени перехода из одной структуры в другую [1].

Условная оптимизация статистического алгоритма. В работе [2] описан статистический алгоритм решения систем со случайной структурой, который использует численный метод решения СДУ, имеющий p-й порядок слабой сходимости. При решении данной задачи статистическим методом важной является проблема оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма: шага численного метода h, размера выборки N и числа узлов гистограммы n_g.

Теорема. *Пусть $\pi^*(x)$ - гистограмма маргинальной плотности $p(x)$ ($x \in [a,b]$) в момент времени $t_{k_1} \in [t_0, T]$, полученная статистическим алгоритмом [2] при решении систем со случайной структурой (1), (3) (или (2),(3)). Тогда минимум трудоемкости вычисления гистограммы достигается при $n_{g,opt} \asymp \gamma^{-1}$, $N_{opt} \asymp \gamma^{-3}$, $h_{opt} \asymp \gamma^{1/p}$, где γ - требуемая точность вычислений в норме пространства $L_2\big([a,b]\big)$.*

Доказательство. Функциональная оценка погрешности уклонения гистограммы $\pi^*(x)$ одномерной случайной величины $\hat{\xi} = y_{k_1}$, $a \le y_{k_1} \le b$ (с плотностью $\hat{p}(x)$), от графика плотности $p(x)$ случайной величины $y(t_{k_1})$ в норме пространства $L_2\big([a,b]\big)$:

$$B^2(p,\pi^*) = \Big(E\|p(x)-\pi^*(x)\|_{L_2\left([a,b]\right)}\Big)^2 \le \Big(E\Big\{\int_a^b \Big[p(x)-\pi^*(x)\Big]^2 dx\Big\}^{1/2}\Big)^2$$
$$\le \int_a^b E\Big[p(x)-\pi^*(x)\Big]^2 dx = \int_a^b \mathbf{D}\pi^*(x)dx + \int_a^b \Big[p(x) - E\pi^*(x)\Big]^2 dx. \qquad (4)$$

Будем считать шаг гистограммы постоянным, т.е. $h_g = (b-a)/n_g$. Тогда гистограмма $\pi^*(x)$ определяется

$$\pi^*(x) = \frac{m_k}{Nh_g}, \quad x \in I_k = [a+(k-1)h_g, a+kh_g],$$

где m_k — число наблюдений случайной величины $\hat{\xi} = y_{k_1}$, попавших в отрезок I_k. Заметим, что m_k является случайной величиной с биномиальным распределением и означает число успехов в N независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $\hat{p}_k = \int_{I_k} \hat{p}(x)dx$. Поэтому $\mathbf{D}m_k = N\hat{p}_k(1-\hat{p}_k)$ и первое слагаемое в (4) имеет вид:

$$\int_a^b \mathbf{D}\pi^*(x)dx = \sum_{k=1}^{n_g}\int_{I_k}\mathbf{D}\frac{m_k}{Nh_g}dx = \sum_{k=1}^{n_g}\int_{I_k}\frac{\hat{p}_k(1-\hat{p}_k)}{Nh_g^2}dx = \frac{C_1}{Nh_g} = \frac{C_1 n_g}{N}.$$

Если $\frac{d^2\hat{p}}{dx^2}$ ограничена, то для второго слагаемого в (4) имеем:

$$\|p(x) - E\pi^*(x)\| \le \|p(x)-\hat{p}(x)\| + \|\hat{p}(x) - E\pi^*(x)\| \le C_2 h^p + \frac{C_3}{n_g},$$

где учтено, что численный метод решения СДУ слабо сходится с порядком p.

Таким образом,

$$B^2(p,\pi^*) \le C_1 n_g/N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2}.$$

Для получения оптимальных параметров $n_{g,opt}$, N_{opt} и h_{opt} достаточно приравнять получившиеся погрешности и получить требуемый порядок из соотношения

$$C_1 n_g/N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2} = \gamma^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.
2. *Аверина Т. А.* Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // Сиб. ЖВМ. 2002. Т. 5, № 1. С. 1–10