

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ

© А. В. Бойко *, Ю. М. Нечепуренко **

* boiko@itam.nsc.ru, ** yumn@inm.ras.ru

* *Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск;*

** *Институт вычислительной математики РАН, Москва*

Линейные части u' , v' , w' , p' возмущений компонент скорости и давления для течения $u = 0$, $v = 0$, $w = W$ вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале $\{(x, y, z) : (x, y) \in \Sigma, -\infty < z < \infty\}$ постоянного сечения Σ с кусочно гладкой границей удовлетворяют следующим линеаризованным уравнениям Навье – Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + W \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u' &= 0, & \frac{\partial v'}{\partial t} + W \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta v' &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} u' + \frac{\partial W}{\partial y} v' + W \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta w' &= 0, & \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с нулевыми граничными условиями для u' , v' , w' на стенках канала.

Особый интерес представляют задачи об абсолютной и конвективной устойчивости [1], которые состоят в исследовании свойств решений двух следующих видов:

$$u' = u'' e^{i\alpha z}, \quad v' = v'' e^{i\alpha z}, \quad w' = w'' e^{i\alpha z}, \quad p' = p'' e^{i\alpha z}, \quad (2)$$

где α заданная вещественная константа, а u'' , v'' , w'' , p'' функции x , y и t , не зависящие от z , и

$$u' = u''' e^{i\omega t}, \quad v' = v''' e^{i\omega t}, \quad w' = w''' e^{i\omega t}, \quad p' = p''' e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где ω заданная вещественная константа, u''' , v''' , w''' , p''' функции x , y и z , не зависящие от t . Предполагается, что $u'' = v'' = w'' = 0$ и $u''' = v''' = w''' = 0$ при $(x, y) \in \partial\Sigma$.

Подставляя (2) в (1) получим систему уравнений для u'' , v'' , w'' , p'' , которая после дискретизации по пространственным переменным может быть записана в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$d\mathbf{v}/dt = J\mathbf{v} + Gp, \quad F\mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{v}$ — n_v -компонентный вектор дискретных аналогов компонент скорости, p — n_p -компонентный вектор дискретного аналога давления ($n_p < n_v$), J — квадратная матрица порядка n_v , а G , F — матрицы полного ранга размеров $n_v \times n_p$ и $n_p \times n_v$, соответственно.

Подставляя (3) в (1), вводя две новые переменные: $u'''' = \partial u''' / \partial z$, $v'''' = \partial v''' / \partial z$, и выражая $\partial w''' / \partial z$ и $\partial^2 w''' / \partial z^2$ в третьем уравнении (1) через u'''' и v'''' , используя четвертое уравнение, получим систему уравнений для u''' , v''' , p''' , u'''' , v'''' и w''' , которая после дискретизации по пространственным переменным может быть записана в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d\chi/dz = C\chi, \quad (5)$$

где χ — $2n_v$ -компонентный вектор дискретных аналогов u''' , v''' , p''' , u'''' , v'''' и w''' , а C — квадратная матрица порядка $2n_v$.

Данный доклад посвящен постановке, обоснованию и численному исследованию двух следующих задач Коши для систем (4) и (5) соответственно.

ЗАДАЧА 1. Задан n_v -компонентный вектор $\mathbf{v}^0$, найти $\mathbf{v}(t)$ и $p(t)$, удовлетворяющие (4) при $t > 0$ и начальному условию $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^0$.

ЗАДАЧА 2. Задан $2n_v$ -компонентный вектор χ^0 . Найти $\chi(z)$, удовлетворяющий (5) при $z > 0$ и начальному условию $\chi(0) = \chi^0$.

Особое внимание уделяется редукциям, позволяющим существенно уменьшить алгебраическую размерность рассматриваемых задач. В качестве иллюстрации рассматривается течение Пуазейля в канале прямоугольного сечения.

Опишем для каждой из задач первые шаги предлагаемых редукций. Рассмотрим задачу 1. Пусть

$$G = U \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F^* = V \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}$$

— QR-разложения, т. е. U и V — унитарные матрицы порядка n_v , а R и S — верхние треугольные порядка n_p . Введем в рассмотрение матрицы $\tilde{J} = U^* J V$, $E = U^* V$. Разобьем матрицы на блоки следующим образом:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{12} \\ \tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, \quad U = [U_1, U_2], \quad V = [V_1, V_2],$$

где блок (k, l) — матрица размера $n_k \times n_l$, блоки U_l и V_l — матрицы размера $n_v \times n_l$, а $n_1 = n_p$, $n_2 = n_v - n_p$.

Теорема 1. Пусть матрица E_{22} невырожденная. Тогда для любого n_v -компонентного вектора $\mathbf{v}^0$, удовлетворяющего уравнению $F\mathbf{v}^0 = 0$, решение задачи 1 существует, единственно и представимо в виде

$$\mathbf{v}(t) = V_2 \exp\{t E_{22}^{-1} \tilde{J}_{22}\} V_2^* \mathbf{v}^0, \quad p(t) = R^{-1} (E_{12} E_{22}^{-1} \tilde{J}_{22} - \tilde{J}_{12}) \exp\{t E_{22}^{-1} \tilde{J}_{22}\} V_2^* \mathbf{v}^0.$$

Задача 2 очевидно имеет единственное решение $\chi(z) = \exp\{z C\} \chi^0$. В частности, если χ^0 — собственный вектор, отвечающий некоторому собственному значению γ_0 матрицы C , то $\chi(z) = \exp\{z \gamma_0\} \chi^0$. Пусть для определенности $\omega \geq 0$. Нас будут интересовать только те решения системы (5), в которых не присутствуют собственные векторы, отвечающие собственным значениям γ с $\text{Im} \gamma > 0$. Физически это означает отсутствие волн, отраженных от границы $z = \infty$, и отсутствие там источников.

Пусть X_1 и X_2 означают $2n_v \times m$ и $2n_v \times (2n_v - m)$ матрицы, столбцы которых образуют базисы в инвариантных подпространствах матрицы C , отвечающих ее собственным значениям γ , удовлетворяющим условиям а) $\text{Im} \gamma \leq 0$ и б) $\text{Im} \gamma > 0$, соответственно. Тогда матрица $X = [X_1, X_2]$ невырожденная и

$$C = [X_1, X_2] \text{diag}(C_1, C_2) [Y_1, Y_2]^*, \quad [Y_1, Y_2]^* = [X_1, X_2]^{-1},$$

где C_1 и C_2 — квадратные матрицы порядков m и $2n_v - m$ с собственными значениями γ , удовлетворяющими условиям (а) и (б) соответственно.

В решении задачи 2 не будут присутствовать собственные векторы, отвечающие собственным значениям типа (б), в том и только том случае, если $Y_2^* \chi^0 = 0$. Когда это условие выполнено, решение задачи 2 представимо в виде

$$\chi(z) = X_1 \exp\{z C_1\} Y_1^* \chi^0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmid P. J., Henningson D. S. Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer, 2000.