

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© А. Н. Бондаренко *, Д. С. Иващенко **

* bondarenkoan1953@mail.ru, ** stanger@ngs.ru

* Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск;

** Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

Постановка задачи. Процесс диффузии дробного порядка характеризуется нестационарным распределением частиц в пространстве, где расстояние x , которое прошла частица за время t из начальной точки, растет по закону $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\alpha$, $\alpha \neq 1$. Процессы диффузии дробного порядка протекают, в частности, в пористых (фрактальных) средах [1]. В качестве математической модели такого процесса используется дифференциальное уравнение с дробной производной по времени.

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x, t) : x \geq 0, t \geq 0\}$ краевую задачу следующего вида:

$${}_t\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad t > 0.$$

Здесь $\varphi(t)$ — периодическая функция, а оператор ${}_t\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ — это оператор дробного дифференцирования Капуто, действующий по правилу

$${}_t\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi.$$

Решение краевой задачи представляется в виде [2]

$$u(x, t) = \int_0^t \mathcal{G}(x, \tau) \psi(t-\tau) d\tau, \quad \mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-\beta n)} \frac{x^n}{\lambda^n t^{\beta n}},$$

где $\mathcal{G}(x, t)$ — функция Грина данной краевой задачи.

Метод конечных разностей численного решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени. Для численного решения краевой задачи используется метод конечных разностей. Дифференциальное уравнение с дробной производной по времени аппроксимируется следующим образом. Введем сетку в Ω : $\hat{\Omega} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih, t_j = j\tau\}$ и обозначим через y_i^j значение в узле (x_i, t_j) сеточной функции y , определенной на $\hat{\Omega}$. Заменяя производную ${}_t\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ ее разностным аналогом — дробной производной Грюнвальда — Летникова

$$y_t^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \frac{y_i^{j+1-k} - y_i^0}{\tau^\alpha},$$

а $\partial^2 u / \partial x^2$ — второй разностной производной и вводя произвольный вещественный параметр σ , получим разностную схему с весами

$$y_t^{(\alpha)} = \Lambda_\lambda \left(\sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma) y_i^j \right),$$

где оператор Λ_λ действует по правилу

$$\Lambda_\lambda y_i^j = \frac{\lambda^2}{h^2} \left[y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j \right].$$

С помощью классической техники теории разностных схем, изложенной в [3], исследована устойчивость рассматриваемой разностной схемы с весами. Определим норму сеточной функции $y_i^j = y^j(x_i)$: $\|y^j\|_C = \max_{x_i \in \Omega} |y^j(x_i)|$. Разностная схема с весами называется устойчивой в

C , если выполнена оценка $\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C$.

Теорема. Если имеет место соотношение

$$\tau^\alpha \leq \frac{\alpha h^2}{2(1-\sigma)\lambda^2},$$

то разностная схема с весами устойчива в C .

Метод Монте-Карло численного решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени. В работе R. Gorenflo и F. Mainardi [4] были рассмотрены дискретные модели случайного блуждания для немарковских диффузионных процессов. Основная идея состоит в замене уравнения диффузии дробного порядка разностным, полагая $\sigma = 0$. Получается так называемый универсальный закон перехода от t_j к t_{j+1} , справедливый для всех $j \geq 0$. Вводя обозначения

$$c_k = (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k} = \left| \binom{\alpha}{k} \right|, \quad k \geq 1; \quad b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{\alpha}{k}, \quad j \geq 0; \quad \rho = \frac{\tau^\alpha \lambda^2}{h^2},$$

получим

$$y_i(t_{j+1}) = \eta(t_j) + \zeta(t_j),$$

где

$$\eta(t_j) = \left(1 - \sum_{k=1}^j c_k \right) y_i(t_0) + c_j y_i(t_1) + c_{j-1} y_i(t_2) + \dots + c_2 y_i(t_{j-1}) + (c_1 - 2\rho) y_i(t_j),$$

$$\zeta(t_j) = \rho [y_{i+1}(t_j) + y_{i-1}(t_j)].$$

Анализ данного выражения позволяет заключить, что в нем учитывается вся «история» частицы, то есть весь ее путь $\{x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_j)\}$.

Применительно к рассматриваемой краевой задаче случайное блуждание реализуется с учетом того, что всякий источник состоит из точечных источников, и, соответственно, всякую функцию можно разложить по δ -функциям. Поэтому при моделировании периодического источника в методе Монте-Карло используется периодическая функция, связывающая количество «испускаемых» источником частиц с дискретными моментами времени, а также амплитудой и частотой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670.
2. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett. 1996. V. 9. P. 23–28.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
4. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Paradisi P. Time fractional diffusion: a discrete random walk approach // Nonlinear Dynamics. 2002. V. 29, P. 129–143.