

УДК 514.75

ЛИСТ МЕБИУСА

© М. А. Чешкова

cheshkov@ab.ru

Алтайский государственный университет, Барнаул

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим линейчатую поверхность ([1, с. 40]) M :

$$r(u, v) = e(v) + ul(v),$$

где $e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$ — направляющая окружность, $l(v)$ — орт образующей прямой.

Будем предполагать, что прямые ортогонально пересекают окружность. Обозначим через $\varphi(v)$ — угол между плоскостью окружности и прямой. Тогда

$$l(v) = \cos(\varphi)e(v) + \sin(\varphi)a,$$

где $a = (0, 0, 1)$,

$$r(u, v) = (1 + u \cos(\varphi))e(v) + u \sin(\varphi)a.$$

Если при этом $\varphi = kv/2$, $k \neq 0$ — целое число, то прямые $r(u, 0), r(u, 2\pi)$ “склеиваются”. Имеем лист Мебиуса ([2, с. 167]), перекрученный k раз (рис. 1–3).

Гауссова кривизна поверхности равна

$$K(u, v, k) = -\frac{k^2}{4((1 + u \cos(kv/2))^2 + (uk/2)^2)^2}$$

Откуда следует, что $K(u, v, k) < 0$ — все точки листа Мебиуса гиперболические.

В частности, рассмотрим гауссову кривизну $K(0, v, k)$ вдоль средней окружности $S: r = r(0, v)$ и гауссову кривизну $K(u, 0, k)$ вдоль образующей L , ортогональной плоскости средней окружности.

Имеем $K(0, v, k) = -\frac{k^2}{4}$, $K(u, 0, k) = -\frac{k^2}{4((1+u)^2 + (uk/2)^2)^2}$. Замечаем, что гауссова кривизна постоянна вдоль средней окружности

Исследуем, как меняется гауссова кривизна при закручивании. Для этого рассмотрим график функции

$$f(u, v) = K(u, v, k+1) - K(u, v, k) = -\frac{(k+1)^2}{4((1 + u \cos((k+1)v/2))^2 + (uk/2)^2)^2} + \frac{k^2}{4((1 + u \cos(kv/2))^2 + (uk/2)^2)^2}.$$

Картину изменения гауссовой кривизны при закручивании дают рис. 4–6.

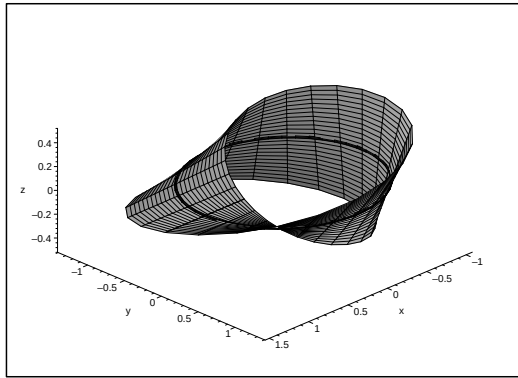


Рис. 1. Лист Мебиуса, $k = 1$.

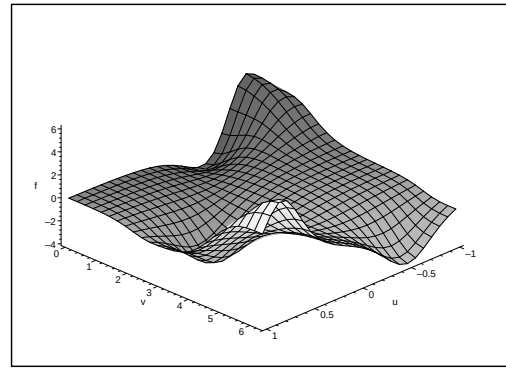


Рис. 4. $f = K(u, v, 2) - K(u, v, 1)$.

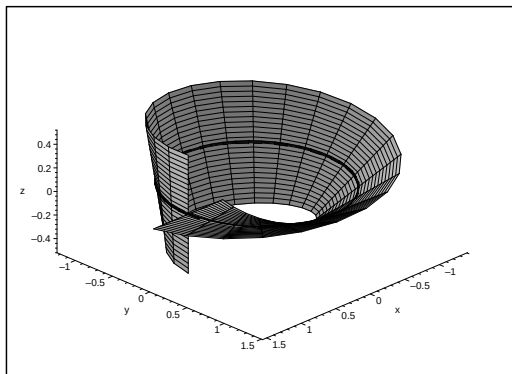


Рис. 2. Лист Мебиуса, $k = 1/2$.

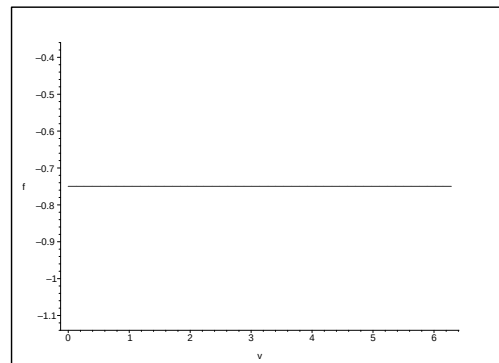


Рис. 5. $f = K(0, v, 2) - K(0, v, 1)$.

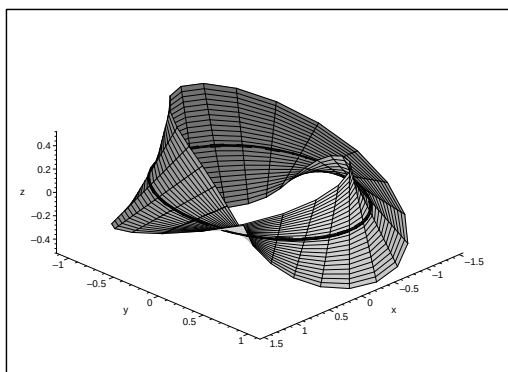


Рис. 3. Лист Мебиуса, $k = 2$.

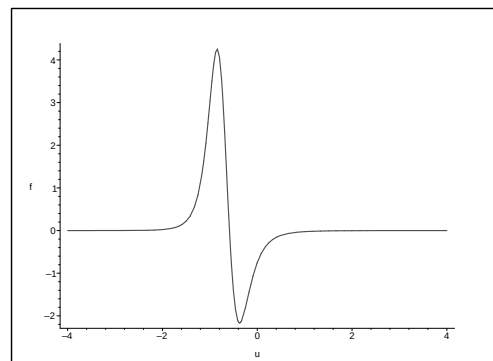


Рис. 6. $f = K(u, 0, 2) - K(u, 0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М., 1969. 167 с.
2. Торн Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. М., 1962. 360 с.