

УДК 517.958:539.4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧНОЙ ПРОСЛОЙКИ В СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

© Т. В. Ерошкина

tanya@math.susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Введение. Осесимметричные задачи теории идеальной пластичности, как правило, не являются статически определяемыми: два уравнения равновесия и уравнение пластичности содержат четыре неизвестных компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_\varphi, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\tau}_{rz}$, т. е. система уравнений в напряжениях не замкнута. В работе рассматривается напряженное состояние мягкой поперечной прослойки прямоугольного сечения круглого сплошного стержня под растягивающей осевой нагрузкой, когда поперечные сечения прослойки в процессе деформации остаются практически плоскими в силу сдерживающего влияния более прочной части стержня. Эта гипотеза (ГПС — гипотеза плоских сечений), как нетрудно показать, приводит к условию $\tilde{\sigma}_\varphi = \tilde{\sigma}_r$, где $\tilde{\sigma}_\varphi, \tilde{\sigma}_r$ — тангенциальное (кольцевое) и радиальное нормальные напряжения. В этом случае напряженное состояние (НС) прослойки описывается системой уравнений пластического равновесия, замкнутой в напряжениях, и имеющей вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0, \quad (2)$$

$$f(\tilde{\sigma}_r, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\tau}_{rz}) = k. \quad (3)$$

Здесь

$$\sigma_r = \tilde{\sigma}_r/k, \quad \sigma_z = \tilde{\sigma}_z/k, \quad \tau = \tilde{\tau}_{rz}/k$$

— безразмерные компоненты напряжений, (1) и (2) — уравнения равновесия, (3) — условие пластичности, k — предел текучести. Основной металл и металл прослойки предполагаются однородными и изотропными, с одинаковыми механическими характеристиками в упругой зоне, но с разными пределами текучести. Условие текучести (3) в безразмерных напряжениях в форме Мизеса можно представить приближенно в виде (плюс — при растяжении):

$$\sigma_z - \sigma_r = \pm \sqrt{3}(1 - \tau^2/2). \quad (4)$$

Носителем системы (1)–(3) является прямоугольная область, моделирующая осевое сечение прослойки. Из соображений симметрии достаточно рассматривать четверть сечения: $r \in [0; 1]$, $z \in [0; \chi]$, где χ — относительная толщина прослойки (радиус стержня принят равным единице). Имеют место граничные условия

$$\tau(0, z) = 0, \quad \sigma_r(1, z) = 0, \quad \tau(1, z) = 0, \quad \tau(r, 0) = 0. \quad (5)$$

Пусть в каждый момент нагружения известно наибольшее значение τ на контактной поверхности:

$$\tau(r_0, \chi) = \max \tau(r, \chi) = \alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad r \in [0; 1].$$

Исключение из системы (1), (2), (4) нормальных напряжений приводит к уравнению

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2(\tau^2)}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tau}{r} \right) = 0. \quad (6)$$

Рассматриваются частные случаи напряженного состояния, допускающие гипотезу о разделении переменных (ГРП) для касательных напряжений: $\tau = R(r)Z(z)$. Целью сообщения является анализ математических моделей напряженного состояния прослойки, полученный при ГПС и ГРП, и вычисление в каждом случае напряжений в прослойке в произвольный момент нагружения. Следствием применения ГРП к (6) является уравнение

$$2\sqrt{3} R' Z' + Z''/Z - R''/R - (R/r)'/R = 0, \quad (7)$$

которое противоречиво, за исключением следующих частных случаев.

Первый случай. Функция $Z(z)$ постоянна. Тогда из (7) следует, что $R(r) = m_1 r + m_2/r$, где m_1 и m_2 — произвольные константы. Это известное решение [1].

Второй случай. $Z'(z)$ постоянна, $Z'(z) \neq 0$. Тогда $Z(z) = Cz$. Без ограничения общности можно считать $C = 1$. Из (7) следует для некоторой константы A :

$$\sqrt{3}R^2 - R' - R/r = -A, \quad (8)$$

причем, как видно из (5),

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = A, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(r)}{r} = A, \quad (9)$$

а постоянная A определяется параметром α из начального условия (5). Уравнение (8) имеет только нечетные решения при условии (7).

Решение системы (1)–(4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2z}{\sqrt{3}r} \ln \left(\frac{2}{2 - \sqrt{3}Ar^2} \right), \quad r \neq 0; \\ \sigma_z &= \frac{-2Az^2}{2 - \sqrt{3}Ar^2} - \frac{1}{2} \left(Ar^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{2} (Ar^2)^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{3} (Ar^2)^3 + \dots \right) + C + \sqrt{3}; \\ \sigma_r &= -\frac{1}{2} \left(Ar^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{2} (Ar^2)^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{3} (Ar^2)^3 + \dots \right) + A \left(\sqrt{3} - \frac{z^2}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Параметр A вычисляется по формуле: $A = 2(1 - \exp(-\sqrt{3}r_0\alpha/(2\chi)))/\sqrt{3}r_0^2$. Существует несколько различных методик вычисления постоянной C . Наиболее простая, но наименее точная, приводящая к заметному завышению значений σ_z , основана на вычислении среднеинтегрального значения σ_r на свободной поверхности $r = 1$. Другие методы связаны с исследованием поля характеристик в окрестности свободной границы [2].

Третий случай. $R'(r)$ постоянна. Без ограничения общности можно считать $R(r) = r$. Уравнение (7) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению $2\sqrt{3} Z'Z + Z'' = 0$, решение которого при условии $Z(0) = 0$ имеет вид: $Z = A \operatorname{th}(\sqrt{3}Az)$ или $Z = -A \operatorname{tg}(\sqrt{3}Az)$. Решение системы (1)–(4) в этом случае:

$$\tau = \operatorname{Arth}(\sqrt{3}Az) \quad \text{или} \quad \tau = -\operatorname{Artg}(\sqrt{3}Az)$$

(минус соответствуют сжатию). Выражения для вычисления нормальных напряжений (с точностью до постоянного слагаемого) получаются отсюда интегрированием.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 05-08-18179).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
2. Дильман В. Л., Ерошкина Т. В. Об одной модели, описывающей напряженное состояние в круглом стержне // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, вып. 4. С. 793–794.