

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

© С. В. Гайдомак

gaidamak@icc.ru

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Рассматривается вырожденная система уравнений в частных производных

$$A\partial_t u + B\partial_x u + Cu = f, \quad \partial_t \equiv \partial/\partial t, \quad \partial_x \equiv \partial/\partial x, \quad (1)$$

где $A \equiv A(x, t)$, $B \equiv B(x, t)$, $C \equiv C(x, t)$ — заданные матрицы размера $(n \times n)$ с элементами, зависящими от переменных $x \in \mathbf{R}^1$ и $t \in \mathbf{R}^1$, $(x, t) \in \mathbf{U} = [x_0; X] \times [t_0; T]$; $f \equiv f(x, t)$ и $u \equiv u(x, t)$ — соответственно известная и искомая n -мерные вектор-функции. В системе (1) матрица A , либо матрица B , либо пучок матриц $\lambda A + \mu B$ тождественно вырождены в области $\mathbf{U} \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}^1$. Такие системы в литературе называются тождественно вырожденными, не разрешенными относительно старшей производной, системами Соболева, алгебро-дифференциальными уравнениями в частных производных, а также системами не относящимися к типу систем Коши – Ковалевской. Зададим для системы (1) начально-краевые условия:

$$u(x, t_0) = \phi(x), \quad u(x_0, t) = \psi(t). \quad (2)$$

Вопрос существования решения системы (1) с граничными условиями (2) был исследован в работе [1]. Получена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в начально-краевой задаче (1)–(2): пучок матриц $\lambda A + \mu B + C$ удовлетворяет двойному критерию “ранг-степень”; корни многочлена $\det(\lambda A + D)$, $D = B + (E - SS^-)C$ отрицательные, простые и возможно кратные нулевые для всех $(x, t) \in \mathbf{U}$, $S = (A B)$, S^- — любая полуобратная матрица к матрице S ; входные данные достаточно гладкие в области $\mathbf{U}$; начальные и граничные данные удовлетворяют условиям: $A(x_0, t)u(x_0, t) = \psi(t)$, $B(x, t_0)u(x, t_0) = \phi(x)$ и предполагаются согласованными в точке (x_0, t_0) со своими производными. Тогда она имеет решение в области $\mathbf{U}$.

Аналогичное утверждение справедливо для случая, когда система (1) имеет индекс (1,0). Отличие состоит лишь в том, что вместо пучка матриц $\lambda A + \mu B + C$ рассматривается пучок $\lambda A + B$ и требуется, чтобы он удовлетворял критерию “ранг-степень”, а вместо многочлена $\det(\lambda A + D)$ — многочлен $\det(\lambda A + B)$.

Ставится следующая задача: необходимо найти численное решение системы (1) в области $\mathbf{U}$ с граничными условиями (2) методом сплайн-коллокации [2]. При этом предполагается, что система (1) гиперболическая индекса (1,1) или (1,0) и для начально-краевой задачи (1)–(2) в области $\mathbf{U}$ выполнены все условия теоремы [1], следовательно она разрешима в области $\mathbf{U}$.

В области $\mathbf{U}$ производится разбиение Δ прямыми: $x = x_0 + ih = x_i$, $t = t_0 + j\tau = t_j$, $i = \overline{0, \mathcal{N}_1}$, $j = \overline{0, \mathcal{N}_2}$, $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathbf{N}$, где h, τ — шаги полученной сетки, $h, \tau \in (0; 1)$ и в каждой области $\mathbf{U}' = [x_i; x_i + m_1 h] \times [t_j; t_j + m_2 \tau] \in \mathbf{U}$ решение задачи (1)–(2) ищется в виде полинома $\mathcal{H}_{m_1, m_2}(x, t)$ со старшими степенями по x и по t равными соответственно m_1, m_2 , с неопределенными коэффициентами, значения которого совпадают со значениями искомого решения в узлах коллокации: $\mathcal{H}_{m_1, m_2}(x_i, t_j) = u(x_i, t_j)$. Для случая, когда $m_1 = m_2 = 2$ такой

полином может иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2,2}(x, t) = & u(x_i, t_j) \prod_i(x) \prod_j(t) + u(x_{i+1}, t_j) \prod_{i+1}(x) \prod_j(t) + u(x_{i+2}, t_j) \prod_{i+2}(x) \prod_j(t) + \\ & u(x_i, t_{j+1}) \prod_i(x) \prod_{j+1}(t) + u(x_{i+1}, t_{j+1}) \prod_{i+1}(x) \prod_{j+1}(t) + u(x_{i+2}, t_{j+1}) \prod_{i+2}(x) \prod_{j+1}(t) + \\ & u(x_i, t_{j+2}) \prod_i(x) \prod_{j+2}(t) + u(x_{i+1}, t_{j+2}) \prod_{i+1}(x) \prod_{j+2}(t) + u(x_{i+2}, t_{j+2}) \prod_{i+2}(x) \prod_{j+2}(t), \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \prod_i(x) &= \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})}, \quad \prod_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})}, \\ \prod_{i+2}(x) &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})}. \end{aligned}$$

Поскольку значения полинома в узлах коллокации совпадают со значениями искомого решения, то в этих узлах полином должен удовлетворять системе (1). Подставляя значения полинома, вычисленные в узлах коллокации (x_{k_1}, t_{k_2}) , $k_1 = j+1, j+2$, $k_2 = j+1, j+2$ и значения его производных последовательно в каждом узле в систему (1), получаем систему конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} & -1/(2\tau)A_{i+1,j+1}(u_{i+1,j} - u_{i+1,j+2}) - \\ & 1/(2h)B_{i+1,j+1}(u_{i,j+1} - u_{i+2,j+1}) + C_{i+1,j+1}u_{i+1,j+1} = f_{i+1,j+1}, \\ & -1/(2\tau)A_{i+2,j+1}(u_{i+2,j} - u_{i+1,j+2}) + \\ & 1/(2h)B_{i+2,j+1}(u_{i,j+1} - 4u_{i+1,j+1} + 3u_{i+2,j+1}) + C_{i+2,j+1}u_{i+2,j+1} = f_{i+2,j+1}, \\ & 1/(2\tau)A_{i+1,j+2}(u_{i+1,j} - 4u_{i+1,j+1} + 3u_{i+1,j+2}) - \\ & 1/(2h)B_{i+1,j+2}(u_{i,j+2} - u_{i+2,j+2}) + C_{i+1,j+2}u_{i+1,j+2} = f_{i+1,j+2}, \\ & 1/(2\tau)A_{i+2,j+2}(u_{i+2,j} - 4u_{i+2,j+1} + 3u_{i+2,j+2}) + \\ & 1/(2h)B_{i+2,j+2}(u_{i,j+2} - 4u_{i+1,j+2} + 3u_{i+2,j+2}) + C_{i+2,j+2}u_{i+2,j+2} = f_{i+2,j+2}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $A_{i,j} \equiv A(x_i, t_j)$, $B_{i,j} \equiv B(x_i, t_j)$, $C_{i,j} \equiv C(x_i, t_j)$. При реализации итерационного процесса, в основе которого лежит решение в каждой точке сетки системы линейных алгебраических уравнений (4) на первом шаге $u_{i,0}$, $u_{0,j}$ определяют из начально-краевых условий (2): $u_{i,0} = \phi(x_i, t_0)$, $u_{0,j} = \psi(x_0, t_j)$, а на каждом последующих шагах берут результаты с предыдущего шага. Для обеспечения большей устойчивости численного решения, в процессе вычисления передвигаться по сетке в области $\mathbf{U}$ следует слева направо на шаг h и снизу вверх от слоя к слою на шаг τ .

Способ отыскания численного решения с помощью описанной выше схемы называется методом сплайн-коллокации. Сходимость численного процесса, организованного по методу сплайн-коллокации доказана в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть для начально-краевой задачи (1)–(2) выполнены все условия теоремы 1. Тогда найдутся такие τ^* , $h^* \in (0; 1)$, что для всех $\tau < \tau^*$, $h < h^*$, удовлетворяющих условию $\tau = h^2$, $|\lambda^*|h < \frac{1}{8}$, λ^* — наибольшее из всех собственных чисел матрицы $B(x, t)$, вычисленных в узлах коллокации, метод сплайн-коллокации сходится и справедлива оценка $\|u(x_i, t_j) - u_{i,j}\| = O(h^2) + O(\tau) \quad \forall i, j$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайдомак С. В., Чистяков В. Ф. О системах не типа Коши – Ковалевской индекса $(1, k)$ // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 2. С. 45–59.
2. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн функций. М.: Наука, Главная редакция физико-математ. литературы, 1980.