

УДК 517.9; 519.6

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ПО ПАРАМЕТРАМ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© С. А. Гусев

sag@osmf.sccc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Рассматривается следующая краевая задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b_{ij}(t, x, p) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d a_i(t, x, p) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x, p)u + f(t, x, p) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in G, \quad (1)$$

$$u(T, x, p) = \varphi(x, p), \quad x \in G, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \eta(t, x, p)u + \gamma(t, x, p) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (3)$$

где G — область в R^d с границей ∂G ; n — единичный вектор внутренней нормали в точке $x \in \partial G$; p — вектор параметров из некоторого множества $U \subset R^m$.

Краевой задаче (1)–(3) ставится в соответствие диффузионный процесс с отражением от границы, который описывается системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$X_s = x + \int_t^s a(v, X_v, p)dv + \int_t^s \sigma(v, X_v, p)dW_v + k_s, \quad (4)$$

$$k_s = \int_t^s n(X_v)dk_v, \quad |k_s| = \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v)dk_v, \quad (5)$$

где σ — $d \times d$ -матрица такая, что $\sigma\sigma^T = B \equiv (b_{ij})$; χ_A — индикаторная функция множества A ; $|k|$ — скалярный возрастающий процесс, который растет только тогда, когда $X \in \partial G$. Процесс $|k|$ называется локальным временем процесса X на ∂G . В действительности $|k_s|$ представляет собой полную вариацию функции k на отрезке $[t, s]$.

Для моделирования траекторий системы (4)–(5) предлагается использовать схему Эйлера с ортогональным проектированием численного решения на $\bar{G}$.

Оценку решения задачи (1)–(3) будем рассматривать как приближенное значение функционала, полученное в результате моделирования траекторий системы (4)–(5)

$$u(t, x, p) = E_{t,x}(\varphi(X_T, p)Y_T(p) + Z_T(p)), \quad (6)$$

где $E_{t,x}$ обозначено математическое ожидание при условии $X_t = x$, а $Y_T(p)$, $Z_T(p)$ — значения при $s = T$ следующих функций

$$Y_s(p) = \exp\left(\int_t^s c_v dv + \int_t^s \eta_v dk_v\right), \quad Z_s(p) = \int_t^s f_v Y_v dv + \int_t^s \gamma_v Y_v dk_v. \quad (7)$$

Оценки производных вида $\partial u/\partial p$ рассматриваются как результат приближенного определения значений функционала, полученного в результате дифференцирования по параметрам функционала (6)

$$\frac{\partial u}{\partial p}(t, x) = E_{t,x} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T) \partial_p X_T + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(X_T) \right) Y_T + \varphi(X_T) \partial_p Y_T + \partial_p Z_T \right),$$

где $\partial_p X$, $\partial_p Y$, $\partial_p Z$ обозначены производные по параметрам от X , Y , Z . Причем значения этих производных находятся из уравнений, которые получаются в результате дифференцирования по параметрам уравнений (4), (5), (7)

$$\begin{aligned} \partial_p X_s &= \int_t^s \left(\frac{\partial a_v}{\partial x} \partial_p X_v + \frac{\partial a_v}{\partial p} \right) dv + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma_v}{\partial x} \partial_p X_v + \frac{\partial \sigma_v}{\partial p} \right) dW_v + \\ &\quad \int_t^s \frac{\partial n(X_v)}{\partial x} \partial_p X_v d|k_v| + \int_t^s n(X_v) d(\partial_p |k_v|), \\ \partial_p Y_s &= Y_s \left[\int_t^s \left(\frac{\partial c_v}{\partial x} \partial_p X_v + \frac{\partial c_v}{\partial p} \right) dv + \right. \\ &\quad \left. \int_t^s \left(\frac{\partial \eta_v}{\partial x} \partial_p X_v + \frac{\partial \eta_v}{\partial p} \right) d|k_v| + \int_t^s \eta_v d(\partial_p |k_v|) \right], \\ \partial_p Z_s &= \int_t^s \left[\left(\frac{\partial f_v}{\partial x} \partial_p X_v + \frac{\partial f_v}{\partial p} \right) Y_v + f_v \partial_p Y_v \right] dv + \\ &\quad \int_t^s \left[\left(\frac{\partial \gamma_v}{\partial x} \partial_p X_v + \frac{\partial \gamma_v}{\partial p} \right) Y_v + \gamma_v \partial_p Y_v \right] d|k_v| + \int_t^s \gamma_v Y_v d(\partial_p |k_v|), \\ |\partial_p k_s| &= \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v) d(\partial_p |k_v|). \end{aligned}$$

В докладе дано обоснование возможности такого дифференцирования. Также установлен порядок погрешности $O(h^{\frac{1}{2}})$ оценок для u и $\partial u/\partial p$ при моделировании траекторий диффузионного процесса методом Эйлера с шагом h и даны результаты численных экспериментов.

Работа поддержана научной программой "Ведущие научные школы" (НШ-4774.2006.1).