

УДК 550.334

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ 2D ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОРИСТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЛАГЕРРА

© Х. Х. Имомназаров *, А. А. Михайлов

* imom@omzg.ssc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Пусть полуплоскость $x_2 > 0$ заполнена пористой средой насыщенной жидкостью. Тогда распространение сейсмических волн в данной среде при отсутствии потери энергии описывается следующей начально-краевой задачей [1–3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{0,s}} \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i, \\ \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \left(\lambda - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} K \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} K \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha \rho_0 \rho_{0,s}) \operatorname{div} \vec{u} + \alpha \rho_0 \rho_{0,l} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = h_{ik}|_{t=0} = p|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$h_{22} + p|_{x_2=0} = h_{12}|_{x_2=0} = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} p \Big|_{x_2=0} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2)$ — вектора скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_{0,s}$ и жидкости с парциальной плотностью $\rho_{0,l}$ соответственно, p — поровое давление, h_{ik} — тензор напряжений, $\vec{f} = (f_1, f_2)$ — вектор массовых сил, $\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$, $\rho_{0,s} = \rho_{0,s}^f (1 - d_0)$, $\rho_{0,s} = \rho_{0,l}^f d_0$, $\rho_{0,s}^f$ и $\rho_{0,l}^f$ — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, d_0 — пористость, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ коэффициенты Ламе, $\alpha = \rho_0 \alpha_3 + K/\rho_0^2$, $K = \lambda + 2\mu/3$, $\rho_0^3 \alpha_3 > 0$ — модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды, δ_{ik} — символ Кронекера.

Для решения поставленной задачи (1)–(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени:

$$\vec{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \vec{W}(x_1, x_2, t) (ht)^{-\alpha/2} l_m^\alpha(ht) d(ht), \quad (4)$$

с формулой обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\alpha/2} \sum_{m=0}^\infty \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}_m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht), \quad (5)$$

где $l_m^\alpha(ht)$ — функции Лагерра.

В результате преобразования исходная задача (1)–(3) сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области [4, 5]. Для решения данной задачи

применяется конечно-разностная аппроксимация производных по двум пространственным координатам на сдвинутых сетках с 4-ым порядком точности. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений. Предлагаемый метод решения можно рассматривать как аналог известного спектрально-разностного метода на основе Фурье-преобразования, только вместо частоты ω мы имеем параметр m — степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения m присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. В результате, матрица системы сведённой задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на основе итерационных методов, типа сопряжённых градиентов, сходящиеся к решению с требуемой точностью всего за несколько итераций. На этом этапе проведения вычислений была реализована распараллеленная версия метода сопряженных градиентов. На уровне входных данных, при задании модели среды, это равносильно декомпозиции исходной области на множество подобластей, равных количеству процессоров. Это дает возможность распределения памяти, как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

В докладе представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей для тестовых моделей среды, полученные в результате проведённых расчётов на многопроцессорном вычислительном комплексе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-05-65110), проекты РАН № 16.12 и СО РАН № 1.6, 42, а также грантом Фонда содействия отечественной науке ("Доктора наук РАН").

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 1. С. 100–111.
2. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum. Nova Science, New York, 1995.
3. Imomnazarov Kh. Kh. A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium: I. Excitation of Oscillations of the Magnetic Field by the Surface Rayleigh Wave // Math. Comput. Modelling. 1996. V. 24, N 1. P. 79–84.
4. Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics. 2001. V. 9, N 4. P. 1523–1541.
5. Михайлов А. А. Моделирование сейсмических полей для 2.5D неоднородных вязкоупругих сред // Труды международной конференции Математические методы в геофизике – ММГ 2003. Новосибирск, 2003. Часть 1. С. 146–152.