

УДК 519.24

РЕШЕНИЕ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

© Н. Б. Иткина

shurina@online.sinor.ru

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

Прикладные задачи, в которых присутствует конвективный перенос, встречаются в таких областях как метеорология, океанография, нефтеразведка и т. д. Такое многообразие прикладных задач приводит к постоянному повышению требований к точности и эффективности численных методов, используемых при решении конвективно-диффузионных уравнений. Разработка устойчивых и эффективных численных методов — это нетривиальная задача по двум причинам: 1) точное решение нелинейной задачи конвекции может быть разрывным; 2) в окрестности разрывов структура решения достаточно сложная. Поэтому предлагаемые вычислительные методы должны быть адекватны данным проблемам, т. е. они должны гарантировать, что разрывы численного решения будут физически релевантны, и что в окрестности разрывов решения не будут появляться нефизичные осцилляции. Эти трудности достаточно успешно преодолеваются с помощью развивающихся устойчивых конечно разностных и конечно объемных схем высокого порядка. Поскольку разрывный метод Галеркина (DG-метод) позволяет получать аппроксимации разрывных решений, используя идею численных потоков и ограничителей крутизны, применяющихся в конечно разностных и конечно объемных схемах, то его можно рассматривать как некоторое обобщение конечно объемных методов. В данном случае численные потоки — это специальные операторы следа на границе конечного элемента, а ограничители крутизны — операторы, обеспечивающие повышение устойчивости метода. Именно эти дополнения призваны обеспечивать сходимость численного решения к физически релевантному решению без осцилляций вблизи разрывов. Благодаря своей конечно элементной структуре DG-метод имеет ряд преимуществ: 1) разрывный метод Галеркина хорошо приспособлен для локальных сгущений сетки и для локального повышения порядков базисных функций; 2) DG-метод удобен для работы со сложными и геометрически разнородными областями.

В настоящее время можно определить два основных подхода к построению DG-вычислительных схем для решения задач конвекции-диффузии. Первый подход основан на определении численного решения в пространстве кусочно-полиномиальных функций не выше заданной степени, при этом слабая вариационная постановка выписывается для исходного дифференциального уравнения второго порядка в соответствии с введенным в данном пространстве скалярным произведением. Роль численных потоков играют градиентные функции от решения [1]. Второй подход предусматривает переход от дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка [2] и применение стандартного DG-метода для решения уравнений первого порядка.

Рассматриваются вариационные формулировки для первого и второго случаев, проводится сравнительный анализ полученных вычислительных схем на решении модельных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coclurn B., Karniadakis G. E., and Shu C.-W. Discontinuous Galerkin methods. Lecture notes in computational science and engineering. Springer Verlag, 2000.
2. Bassi F., Rebay S. High-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier – Stokes equations // Journal of Computational Physics. 1997. V. 131. P. 267–279.