

ВЫВОД И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ

© А. В. Иванова*, А. П. Чупахин**

* njurka2001@ngs.ru, ** chupakhin@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Гидродинамические явления в атмосфере планет характеризуются многообразием их масштабов. При описании крупномасштабных явлений в атмосфере часто используется модель мелкой воды, предполагающая малую глубину слоя жидкости. Обычно при её выводе и использовании применяется приближение — плоскости, при котором часть поверхности сферы заменяется касательной к ней плоскостью. Однако, такое приближение не описывает движений на сфере в целом. Большой интерес к таким движениям в последнее время вызван обнаружением интересных вихревых явлений в атмосферах планет как Солнечной системы, так и расположенных за её пределами.

В работе предлагается вывод уравнений мелкой воды на вращающейся сфере из уравнений Эйлера, описывающих движения идеальной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере в поле силы тяжести. Особенностью вывода является отсутствие характерного горизонтального масштаба движения. Малым параметром, по которому ведётся разложение решения, является $\varepsilon = \frac{H_0}{a_0}$, где H_0 — характерный вертикальный масштаб движения, a_0 — радиус сферы (планеты). Система уравнений модели мелкой воды на вращающейся сфере имеет вид:

$$\begin{aligned}v_t + vv_\theta + (\sin \theta)^{-1} wv_\varphi + F^{-2} h_\theta - w^2 \operatorname{ctg} \theta + 2R_0^{-1} w \cos \theta &= 0, \\w_t + vw_\theta + (\sin \theta)^{-1} ww_\varphi + F^{-2} (\sin \theta)^{-1} h_\varphi + vw \operatorname{ctg} \theta - 2R_0^{-1} v \cos \theta &= 0, \\h_t + vh_\theta + (\sin \theta)^{-1} wh_\varphi + (\sin \theta)^{-1} h(v \sin \theta)_\theta + w_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Движение зависит от двух безразмерных параметров: чисел Россби и Фруда

$$R_0 = \frac{V_0}{2a_0\Omega_0}, \quad F = \frac{V_0}{\sqrt{gH_0}},$$

где V_0 — характерная горизонтальная скорость, g_0 — ускорение свободного падения, а Ω_0 — угловая скорость вращения сферы.

В системе уравнений, записанной в безразмерных переменных, v и w — широтная и долготная компоненты вектора скорости, $h > 0$ — глубина жидкости, $0 < \theta < \pi$ — широта, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ — долгота.

Особенностью модели является компактность многообразия, на котором определена система уравнений и наличие особенностей поля скоростей. Как и в случае уравнений мелкой воды на плоскости, имеет место газодинамическая аналогия. Уравнения модели совпадают с уравнениями изэнтропической газовой динамики при $\gamma = 2$. Они получаются из общих уравнений вследствие специального интеграла, имеющего вид $\vec{u} \cdot \vec{x} = 0$ и отвечающего отсутствию радиальной компоненты скорости. Найдены преобразования, отвечающие бесконечномерной группе Ли и преобразующие решение стационарных уравнений в другое решение.

Исследованы точные решения уравнений мелкой воды на вращающейся сфере. Важную роль играют стационарные движения вдоль параллелей, определённые с функциональным произволом. Они обобщают постоянные и сдвиговые течения для случая вращающейся сферы. Другой класс стационарных простых волн описывает течения с ненулевой меридиональной компонентой скорости на поверхности сферы в целом. Изучаются решения уравнений мелкой воды на вращающейся сфере под крышкой.

Полученные результаты являются первыми аналитическими исследованиями движений мелкой воды на вращающейся сфере в целом. Аналитические результаты сопровождаются компьютерными расчетами конкретных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05- 01-00080, СО РАН, грант № 2.15.