Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 586–586

УДК 517.9

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА, ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРАМИ СИММЕТРИИ РАЗМЕРНОСТИ ТРИ

© К. К. Измайлова*, А. П. Чупахин**

* `k-iz@yandex.ru`, ** `chupakhin@hydro.nsc.ru`

* *Новосибирский государственный университет, Новосибирск;*
** *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Нелинейное кубическое уравнение Шредингера (НУШ)

$$\imath\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{1}$$

где $\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz},\ \ \psi=\psi_1+\imath\psi_2,\ \ |\psi|=\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2},$ имеет многочисленные приложения в математической физике (нелинейная оптика, теория волн, конденсат Бозе – Эйнштейна и другие). Особый интерес представляют многомерные решения уравнения (1), поскольку в этом случае оно не интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Такие решения строятся методами группового анализа дифференциальных уравнений [1].

После введения амплитуды A и фазы Φ, так что: $\psi=Ae^{\imath\Phi}$, и разделения мнимой и вещественной частей уравнение (1) приводится к эквивалентной системе:

$$\begin{cases}-A\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta A-A|\nabla\Phi|^2+A^3=0,\\ \quad\dfrac{\partial A}{\partial t}+A\Delta\Phi+2(\nabla A,\nabla\Phi)=0.\end{cases} \tag{2}$$

Алгебра симметрии L_{12} и соответствующая ей оптимальная система подалгебр для уравнения Шредингера (1) построены в [2]. Она является центральным расширением алгебры Галилея L_{11}, допускаемой уравнениями газовой динамики [1].

Большой интерес представляют инвариантные подмодели ранга один, для которых фактор-уравнения сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, и частично инвариантные подмодели.

На основе анализа унивессальных инвариантов подалгебр из ΘL_3 доказана

Теорема. *Трехмерные алгебры симметрии НУШ порождают 52 существенно различных подмодели. Среди них 30 инвариантных, из них 27 — ранга один и 3 — ранга два; 22 частично инвариантных, из них 21 — ранга два и 1 — ранга три. Лишней, не инвариантной функцией во всех подмоделях является фаза* Φ.

Несколько подмоделей ранга один рассматривались в работах Патеры и Винтерница, Фущича, Никитина. Большинство инвариантных и все частично инвариантные подмодели являются новыми и порождают точные решения НУШ. Особый интерес для приложений имеют решения, которым отвечают существенно многомерные физические структуры, описываемые НУШ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00080, и СО РАН, грант № 2.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Gagnon L., Winternitz P.* Lie symmetries of a generalised non-linear Schrodinger equation: I. The symmetry group and it subgroups // J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 1493–1511.