

УДК 519.7

КРИТЕРИИ СВОЙСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© А. И. Кадченко

kadchenko@masu.ru

Магнитогорский государственный университет, Магнитогорск

Математическое моделирование динамических систем различной природы требует совершенствования и разработки новых средств анализа качественных характеристик процессов в исследуемых системах. В [1] предложен метод редукции, развивающий алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова. Он позволяет формализовать независимо от предметной области определенную технику получения гипотез. Для применимости метода к логическому уравнению

$$\mathcal{X} \& \left(\bigwedge_{i=1}^k A_i \right) \rightarrow B, \quad (1)$$

требуется лишь существование у A_i и B изоморфного надграфа. Одно из условий A_i есть условие связи. Оно может иметь разнообразный смысл, но обязательно связывает поведение некоторых отображений v типа векторных функций сравнения на процессах исходной и вспомогательных систем. Целесообразно выявление новых возможностей использования условий связи.

Пусть заданы непустые множества X (абстрактное пространство состояний x), $X_0 \subseteq X$ (X_0 — множество начальных состояний x_0), $X^* \subseteq X$ (X^* — множество целевых состояний), X^1 (X^1 — множество фазовых ограничений), T (множество моментов времени t , частично упорядоченное отношением нестрогого порядка $\geq$), $T_0 \subseteq T$ (T_0 — множество начальных моментов времени t_0), $H \subseteq T_0 \times X_0 \times \mathcal{U}$ (H — множество исходных данных h , $h \in H$, $h = (t_0, x_0, u_0)$, $t_0 \in T_0$, $x_0 \in X_0$, $u_0 \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ — множество допустимых управлений u_0). Кроме того, обозначается $T_{t_i} =^{df} \{t \in T : t \geq t_i\}$.

Рассматривается множество $X^{(T)}$ всех частичных функций $x : (T) \rightarrow X$, именуемых движениями. Системой движений (СД) называется отношение $r \subset H \times X^{(T)}$ с аксиомой $\forall h \in H : h = (t_0, x_0, \dots) \forall x \in rh \ t_0 \in \text{dom } x$. В абстрактной управляемой системе выполнена и аксиома: при каждом фиксированном h , $h = (t_0, x_0, u_0)$, $\forall x \in rh \ x(t_0) = x_0$.

В системе движений r с управлениями рассмотрим некоторые свойства достижимости целевого множества X^* из любого начального состояния $x_0 \in X_0$ с соблюдением фазовых ограничений $x(t, t_0, x_0, u_0) \in X^1$ до момента попадания в X^* , а именно:

$$B =^{df} \forall t_0 \in T_0 \exists u_0 \in \mathcal{U} \forall x_0 \in X_0 \forall x \in r(t_0, x_0, u_0) \exists t \geq t_0 \exists x = x(t) \\ (x \in X^* \& \forall t' \in T : t' \geq t_0 \& t \geq t' \forall x' = x(t') \ x' \in X^1). \quad (2)$$

Исходной системе движений r поставим в соответствие вспомогательную систему движений r_c , по замыслу более простую для анализа, чем исходная система. Обозначения всех множеств СД r_c отличаются только наличием индекса "с" от обозначений множеств СД r . Будем считать $T_{0c} = T_0$, $T_c = T$, $H_c \subseteq T_0 \times X_{0c}$ (система движений r_c без управлений), а X_c частично упорядочено отношением $\leq$. Пусть в системе движений r_c имеется свойство диссипативности множества X_c^* с фазовыми ограничениями X_c^1 :

$$A_1 =^{df} \forall t_0 \in T_0 \forall x_{0c} \in X_{0c} \forall x_c \in r_c(t_0, x_{0c}) \exists t_{1c} \in T : t_{1c} \geq t_0 \forall t \geq t_{1c} \\ \forall x_c = x_c(t_c) (x_c \in X_c^* \& \forall t' \in T : t' \geq t_0 \& t \geq t' \forall x'_c = x_c(t'_c) \ x'_c \in X_c^1).$$

Условие связи систем СД r и СД r_c выберем двумя способами.

1. Введем функцию $v : T \times X \rightarrow X_c$, которую подчиним условию связи:

$$\begin{aligned} A_2 =^{\text{df}} \forall t_0 \in T_0 \exists u_0 \in \mathcal{U} \forall x_0 \in X_0 \forall x_{0c} \in X_{0c} : v(t_0, x_0) = x_{0c} \\ \forall x \in r(t_0, x_0, u_0) \exists x_c \in r_c(t_0, x_{0c}) \forall t \geq t_0 \exists x_c = x_c(t) \forall x = x(t) \\ (v(t, x) \leq x_c \ \& \ \forall t' \in T : t' \geq t_0 \ \& \ t \geq t' \ \forall x' = x(t') \ \forall x'_c = x_c(t') v(t', x') \leq x'_c). \end{aligned}$$

Пользуясь алгоритмом решения согласованного уравнения $\mathcal{X} \& A_1 \& A_2 \Rightarrow B$, в котором все члены уравнения имеют степень $N = 2$, найдем $\mathcal{X}$. Полученное решение $\mathcal{X}$ допускает расщепление на конъюнкцию более простых условий, что приводит к получению набора достаточных условий для B .

Теорема 1. В управляемой СД r имеет место свойство B , если существуют СД r_c без управлений при наличии свойства A_1 и функция v такие, что удовлетворяется условие связи типа мажорирования A_2 и выполнены условия:

- 1) $v(T_0 \times X_0) \subseteq X_{0c}$;
- 2) для любых $(t_0, x_0) \in T_0 \times X_0$, $u_0 \in \mathcal{U}$ решения $x \in r(t_0, x_0, u_0)$ продолжимы на T_{t_0} ;
- 3) $\inf\{v(t, x) : t \in \bigcup_{t_0 \in T_0} T_{t_0}, x \in X \setminus X^*\} \not\leq \sup_{x_c \in X_c^*} x_c$;
- 4) для любых $t_0 \in T_0$, $x_{0c} \in v(t_0, X_0)$ решения $x_c \in r_c(t_0, x_{0c})$ продолжимы на T_{t_0} ;
- 5) $\inf\{v(t, x) : t \in \bigcup_{t_0 \in T_0} T_{t_0}, x \in X \setminus X^1\} \not\leq \sup_{x_c \in X_c^1} x_c$.

2. Для функции $v : T \times X \rightarrow X_c$ введем новое условие связи A_3 :

$$\begin{aligned} A_3 =^{\text{df}} \forall t_0 \in T_0 \exists u_0 \in \mathcal{U} \forall x_0 \in X_0 \forall x_{0c} \in X_{0c} : v(t_0, x_0) = x_{0c} \\ \forall x \in r(t_0, x_0, u_0) \exists x_c \in r_c(t_0, x_{0c}) \forall t \geq t_0 \exists x_c = x_c(t) \forall x = x(t) \\ (v(t, x) = x_c \ \& \ \forall t' \in T : t' \geq t_0 \ \& \ t \geq t' \ \forall x' = x(t') \ \forall x'_c = x_c(t') v(t', x') = x'_c). \end{aligned}$$

Методом редукции, пользуясь согласованностью уравнения $\mathcal{X} \& A_1 \& A_3 \Rightarrow B$, получим утверждение.

Теорема 2. В управляемой СД r имеет место свойство B , если существуют СД r_c без управлений при наличии свойства A_1 и функция v такие, что удовлетворяется условие связи типа траекторного гомоморфизма A_3 и выполнены условия:

- 1) $v(T_0 \times X_0) \subseteq X_{0c}$;
- 2) для любых $(t_0, x_0) \in T_0 \times X_0$, $u_0 \in \mathcal{U}$ решения $x \in r(t_0, x_0, u_0)$ продолжимы на T_{t_0} ;
- 3) для любых $t \in T_{t_0}$ $v(t, X \setminus X^*) \subseteq X_c \setminus X_c^*$;
- 4) для любых $t_0 \in T_0$, $x_{0c} \in v(t_0, X_0)$ решения $x_c \in r_c(t_0, x_{0c})$ продолжимы на T_{t_0} ;
- 5) для любых $t \in T_{t_0}$ $v(t, X \setminus X^1) \subseteq X_c \setminus X_c^1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев С. Н. Метод редукции и качественный анализ динамических систем. I, II // Изв. РАН, сер. Теория и системы управления. 2006. № 1, 2.