Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 640–641

УДК 533.6.011 + 517.948.34

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© А. К. Хе

alekhe@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются стационарные трехмерные течения тяжелой идеальной жидкости над ровным дном со свободной поверхностью. Система уравнений, описывающая стационарные длинные волны, не приводится к дивергентному виду. Было замечено (В. М. Тешуков, А. К. Хе), что уравнения течения можно привести к виду, в котором недивергентные слагаемые будут регулярными (ограниченными) функциями, что позволяет вывести из них соотношения на гидравлическом прыжке. Доказано, что при известном положении разрыва параметры течения за гидравлическим прыжком определяются однозначно. В частном классе решений построены ударная поляра и примеры течений с гидравлическим прыжком.

Система уравнений длинноволнового приближения, описывающая стационарные пространственные течения идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести, имеет вид

$$uu_x + vu_y + wu_z + p_x/\rho = 0, \qquad uv_x + vv_y + wv_z + p_y/\rho = 0,$$
$$p_z = -\rho g, \qquad u_x + v_y + w_z = 0.$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости жидкости; p — давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность; x, y, z — декартовы координаты в пространстве. Течение жидкости рассматривается в слое $0 \leqslant z \leqslant h(x,y)$ со свободной границей. Граничные условия: $w = 0$ при $z = 0$; $w = uh_x + vh_y$ и $p = p_0$ при $z = h$.

Вводя лагранжеву координату $\lambda \in [0,1]$, параметризующую материальные поверхности от дна $z = 0$ при $\lambda = 0$ до свободной поверхности $z = h(x,y)$ при $\lambda = 1$, система уравнений в эйлерово-лагранжевых координатах принимает вид

$$uu_x + vu_y + g\left(\int_0^1 H\,d\lambda\right)_x = 0, \quad uv_x + vv_y + g\left(\int_0^1 H\,d\lambda\right)_y = 0, \quad (uH)_x + (vH)_y = 0. \tag{1}$$

Искомыми являются функции u, v, H зависящие от x, y, λ. Функция H введена по формуле $H(x,y,\lambda) = \Phi_\lambda(x,y,\lambda)$, где Φ — функция перехода к лагранжевой переменной λ: $z = \Phi(x,y,\lambda)$.

Система (1) рассматривается как система дифференциальных уравнений с независимыми переменными x, y и операторными (интегральными) коэффициентами в банаховом пространстве функций от λ.

Рассмотрены течения с сильным разрывом, определенным некоторой кривой на плоскости x, y. Система уравнений (1) не приводится к дивергентному виду. В предположении, что функция $v_x - u_y$ является ограниченной функцией, были найдены соотношения на сильном разрыве.

Доказано, что при известном положении линии гидравлического прыжка, зная параметры течения набегающего потока, мы можем однозначно определить параметры течения за прыжком.

Известно (В. М. Тешуков, 2004), что система уравнений (1) имеет класс частных решений, удовлетворяющих условиям

$$q_\lambda = 0, \qquad \vartheta_\lambda / H = A \quad (A = \mathrm{const}). \tag{2}$$

Здесь $q(x,y,\lambda)$, $\vartheta(x,y,\lambda)$ — модуль и угол относительно оси абсцисс вектора (u,v). Равенство $\vartheta_\lambda/H = A$ означает, что угол ϑ линейно меняется от эйлеровой переменной z: $\vartheta(z) = \vartheta^0 + Az$.

В классе течений (2) найдено аналитическое представление для зависимости положения скачка от угла вектора скорости на дне за скачком. Построены ударные диаграммы в переменных $(\vartheta^0, gh^2/2)$, являющиеся аналогом (ϑ, p)-поляр в газовой динамике. Показано, что при переходе через гидравлический прыжок константа A сохраняется и построено решение задачи о взаимодействии гидравлических прыжков.