

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ

© В. А. Нахушева

niipma@mail333.com

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В настоящее время наблюдается большой интерес к экономическим, социальным, медико-биологическим и физическим процессам, протекающим в режимах с обострением. В качестве базовых уравнений математических моделей этих процессов выступают нелинейные или нелокальные дифференциальные уравнения, порядок и тип которых могут вырождаться в моменты обострения. Важной моделью таких уравнений является реактивно-диффузионное уравнение вида

$$D_{t_*t}^\alpha v(\xi, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [(\alpha_1 v + \alpha_2)v] + f(v), \quad (1)$$

где $v = v(\xi, t)$ — скалярная функция точки $\xi \in \mathbb{R}$ и времени t ; $D_{t_*t}^\alpha$ — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегриродифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в момент обострения t_* ; $f(v)$ — полином относительно v , α_1 и α_2 — постоянные величины.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $f(v) = \beta_1 v(1 - v)$, $\beta_1 = \text{const} > 0$ известно в математической биологии как уравнение Фишера. В случае, когда v не зависит от пространственной координаты, $f(v) = \beta_1 v - \beta_2 v^2$, $\beta_2 = \text{const} \geq 0$ уравнение (1) совпадает с обобщенным логистическим уравнением [1, с. 149]:

$$D_{t_*t}^\alpha v(\tau) = \beta_1 v - \beta_2 v^2. \quad (2)$$

К классу уравнений вида (1) относится и уравнение Буссинеска [2, с. 126]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 v^2}{\partial \xi^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим уравнение (1) в случае, когда $f(v)$ меняется по закону

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} = 2\beta_3 v \frac{\partial v}{\partial t} + \beta_4 \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad 0 < \xi < r_0 \quad (4)$$

и соблюдено условие типа нелокального условия А. А. Самарского

$$\delta'(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{r_0} v(\xi, t) d\xi = \alpha_0 (t - t_*)^2 \text{sign}(t_* - t), \quad (5)$$

где β_3 , β_4 , α_0 — постоянные величины.

С учетом (4) и (5) уравнение (1) можно аппроксимировать следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{t_*t}^\alpha v(\xi, \tau) = 2\alpha_1 \delta'(t) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\beta_3 v \delta'(t) + \beta_4 \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Отсюда при $\alpha = 1$, $\alpha_0 \alpha_1 > 0$, $y = t - t_*$, $\xi = \sqrt{2\alpha_0 \alpha_1} x$, $u(x, y) = v(\sqrt{2\alpha_0 \alpha_1} x, y + t_*)$ получаем уравнение

$$\text{sign } y \cdot y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda y^2 \text{sign } y \cdot u \quad (6)$$

с коэффициентами $a = \beta_4/\sqrt{2\alpha_0\alpha_1}$, $\lambda = -2\alpha_0\beta_3$.

Уравнение (6) является уравнением смешанного типа. Оно эллиплично до момента обострения, то есть при $y < 0$, гиперболично после момента обострения, то есть при $y > 0$, и параболично в момент обострения $y = 0$.

Уравнение (6) в области его гиперболичности и при $\lambda = 0$ совпадает с уравнением Бицадзе – Лыкова [2, с. 39]

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Условие (5) для уравнения (6) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^r u(x, y) dx = \alpha_3 y^2 \operatorname{sign} y, \quad (8)$$

где $r = r_0/\sqrt{2\alpha_0\alpha_1}$, $\alpha_3 = \alpha_0/\sqrt{2\alpha_0\alpha_1}$.

При определенной идеализации процесс горения в среде с объемным источником тепла $f(v)$, меняющимся по закону (4), и коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры $v = v(\xi, t)$ по линейному закону, моделируется уравнением вида (1) с $\alpha = 1$ [3]. Если плотность среды ρ распределена по закону $\rho = a_0 \xi^{-k}$, то тепловой процесс, протекающий в режиме с обострением, может быть описан уравнениями следующих видов:

$$x^k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \cdot |y|^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \lambda u, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^r u(x, y) dx = \mu \operatorname{sign} y \cdot |y|^{-n}, \quad (10)$$

где k , n , b , μ — характеристики среды с нелинейной теплопроводностью.

Исключительным случаем модели (9) является уравнение

$$x^k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \cdot y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (11)$$

Основной целью работы является исследование качественных свойств решений уравнений (6), (7), (9) и (11) с соответствующими условиями Самарского (8), (10) и обоснование того, что уравнения смешанного типа могут выступать теоретической основой теории режимов с обострением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-96627).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1998. 171 с.
2. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с. ISBN-5-02-033720-X.
3. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. Тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью // Нелинейный мир, 2005. Т. 3, № 5–6. С. 289–305.