

УДК 519.632.4+519.633.6

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© В. И. Паасонен

paas@ict.nsc.ru

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Многие дифференциальные уравнение второго порядка в частных производных допускают компактную разностную аппроксимацию повышенного порядка точности относительно шагов сетки. Эти построения, выполненные к настоящему времени даже и для задач в криволинейных координатах, восходят к классическим результатам прошлого века, полученным представителем грузинской математической школы Микеладзе [1]. Однако для получения реальной точности высокого порядка при приближенном решении краевых задач необходимо аппроксимировать с адекватной точностью также и граничные условия. Исходя из ряда соображений, автору наиболее удобным представляется использовать для этой цели односторонние разностные аналоги потоков в граничных условиях. Высокий порядок аппроксимации граничных соотношений может быть всегда достигнут за счет того, что для односторонней аппроксимации потока берется достаточно большое число точек. Например, для достижения четвертого порядка аппроксимации первую производную следует аппроксимировать по пяти точкам. В результате такого подхода получаются хоть и “длинные”, но зато одномерные разностные граничные условия. При этом потоки во внешних и внутренних граничных условиях аппроксимируются одинаково и не зависят от вида дифференциального уравнения, а также выглядят единообразно для различных порядков точности, что в совокупности обеспечивает универсальность подхода к формулировке разностной краевой задачи. Таким образом, при такой постановке граничных условий компактные схемы становится возможным применять для решения неоднородных задач, когда область расчета составлена из подобластей, занятых различными материалами.

Одномерный характер граничных условий обеспечивает простую и естественную факторизацию сложной многомерной задачи на одномерные. После расщепления разностная задача распадается на последовательность одномерных задач с матрицами ленточной структуры специального вида. Они отличаются от трехдиагональных матриц наличием конечного числа изолированных “длинных” строк, соответствующих условиям для потоков на внешних и внутренних границах. Изолированность в данном случае означает, что шаблон (множество используемых узлов сетки) внешнего разностного граничного условия полностью лежит в однородном приграничном слое (т. е. в пределах одной подобласти), а шаблон внутреннего граничного условия располагается в пределах двух соседних подобластей слева и справа от данного разреза.

Такой симбиоз компактных схем и многоточечных высокоточных аппроксимаций граничных условий предложен автором в работе [2]. Его характерной особенностью является возможность эквивалентной формулировки системы уравнений в форме параллельного алгоритма расчета по слоям, на границах которых поставлены условия равенства потоков. Алгоритм распараллеливания является обобщением метода параллельной реализации прогонки [3]. Суть алгоритма заключается в следующем. Вводится пока неопределенный вектор w значений решения исходной системы на разрезах — границах слоев. В каждом слое решается три вспомогательные задачи Дирихле — одна для неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями, и две задачи для однородного уравнения с нормированными граничными условиями (ноль на левой границе слоя и единица на правой, и наоборот). Эти группы задач являются взаимно независимыми для различных слоев и могут решаться параллельно. Решение

исходной задачи в любом слое формально выражается в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач для данного слоя, коэффициенты которой суть значения вектора w на его границах.

Подстановка этих формальных выражений решения во все внешние и внутренние граничные условия дает замыкающую алгоритм линейную алгебраическую систему уравнений для определения значений вектора w . Система получается именно трехдиагональной благодаря тому, что строки матрицы, соответствующие граничным условиям, являются изолированными в указанном выше смысле. Исследование корректности всей задачи сводится тогда к доказательству устойчивости этой конечной системы разностных уравнений для определения решения на разрезах. При естественных требованиях к дифференциальной задаче (корректность) и к исходной разностной схеме (диагональное преобладание для соответствующей задачи Дирихле в любом слое) удастся доказать диагональное преобладание в матрице названной замыкающей системы.

На основе развития данной технологии удастся с единых позиций сформулировать и теоретически доказать устойчивость параллельных алгоритмов реализации для целого ряда различных классов задач:

1. Краевых задач для параболических и эллиптических уравнений в областях, составленных из конечного числа прямоугольных однородных подобластей с различными теплофизическими характеристиками [4];

2. Задач в сложных областях с применением декомпозиции области на непересекающиеся подобласти, с постановкой в качестве “мягких” граничных условий на границах раздела подобластей равенства односторонних нормальных производных [5];

3. Задач интерполяции обычными кубическими сплайнами и так называемыми сплайнами с натяжением на основе разностного подхода, при котором сплайн-функция строится как решение разностной краевой задачи с внутренними граничными условиями гладкого сопряжения производных [6].

Таким образом, универсальность и естественность формулировки разностных граничных условий по существу позволяет расширить область применения высокоточных компактных разностных схем от простых областей на краевые задачи для сложных конструкций, состоящих из различных материалов, на задачи в сложных областях, требующих декомпозиции области на простые части и на задачи построения по табличным данным кривых и поверхностей с регулируемыми геометрическими свойствами. При этом во всех случаях возможна как традиционная последовательная технология расчета, так и параллельная.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-01-00146-а и № 06-01-00030).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Микеладзе Ш. Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1941. Т. 5, № 1. С. 57–74.
2. Паасонен В. И. Параллельный алгоритм для компактных схем в неоднородных областях // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 3. С. 98–106.
3. Яненко Н. Н., Коновалов А. Н., Бугров А. Н., Шустов Г. В. Об организации параллельных вычислений и распараллеливании прогонки // Численные методы механики сплошной среды. 1978. Т. 9, № 7. С. 136–139.
4. Паасонен В. И. Сходимость параллельного алгоритма для компактных схем в неоднородных областях // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 3. С. 81–89.
5. Паасонен В. И. Параллельные алгоритмы на основе мягких внутренних граничных условий // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, ч. 2, специальный выпуск. С. 21–27.
6. Паасонен В. И. Параллельный алгоритм построения гиперболических сплайнов // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 87–95.