УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЛАЗЕРЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ

© А. Б. Пальцев

vlasov@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Рассмотрена задача Дирихле для уравнения Лапласа, возникающая при моделировании электрического поля в газовых лазерах специальной конструкции. Для ее эффективного решения применен метод мультиполей [1], обеспечивший быстрое и высокоточное вычисление искомой функции (электрического потенциала) и ее градиента, в том числе вблизи сложных участков границы области (криволинейного дна электрода).

Изучаемая краевая задача для гармонической функции $\Phi(z)$, $z = x + iy$, ставится в (двумерной) односвязной области $g = \mathbb{H} \setminus \overline{\mathcal{D}}$, где $\mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, а область $\mathcal{D}$ представляет собой деформированную вертикальную полосу, граница которой состоит из трех звеньев: $\partial\mathcal{D} = \Gamma^- \cup \Gamma \cup \Gamma^+$; здесь $\Gamma^\pm := \{x = \pm a,\, y \in [b, \infty)\}$, а Γ — гладкая дуга, для точек которой выполняются соотношения $\operatorname{Im} z > 0$, $|\operatorname{Re} z| < a$. Таким образом, граница области g является объединением $\partial g = \mathbb{R} \cup \Gamma^+ \cup \Gamma \cup \Gamma^-$, где $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$. Краевые условия для функции $\Phi(z)$ следующие: $\Phi(z) = 0$, $z \in \mathbb{R}$; $\Phi(z) = \varphi_1$, $z \in \Gamma^-$; $\Phi(z) = \varphi_2$, $z \in \Gamma^+$; $\Phi(z) = \varphi(z)$, $z \in \Gamma$. Здесь φ_1 и φ_2 — постоянные величины, а функция $\varphi(z)$ непрерывна на Γ, причем $\varphi(-a + ib) = \varphi_1$ и $\varphi(a + ib) = \varphi_2$. Решение Φ поставленной задачи ищется в классе $C^2(g) \cap C(\overline{g} \setminus (A^+ \cup A^-)) \cap L_\infty(g)$, где через A^+ и A^- обозначены (бесконечные) точки пересечения $\mathbb{R}$ и, соответственно, Γ^+ и Γ^-.

Искомое решение $\Phi(z)$ найдено в виде суммы $\Phi(z) = U(z) + U_0(z)$. Здесь функция U_0 гармонична в области $G = \mathbb{H} \setminus \Gamma^\pm$, т. е. в полуплоскости с двумя выброшенными разрезами вдоль лучей $\Gamma^\pm$ (очевидно, $g \subset G$), и принимает следующие граничные значения: $U_0(z) = 0$, $z \in \mathbb{R}$; $U_0(z) = \varphi_1$, $z \in \Gamma^-$; $U_0(z) = \varphi_2$, $z \in \Gamma^+$. Функция U, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа в g, а на ∂g подчинена условиям: $U(z) = 0$, $z \in \gamma$, $U(z) = \varphi(z) - U_0(z)$, $z \in \Gamma$; здесь $\gamma := \Gamma^- \cup \mathbb{R} \cup \Gamma^+$.

Подчиним конформное отображение $\zeta = \mathcal{F}(z)$ области G на $\mathbb{H}$ следующим условиям: $\mathcal{F}(A^\pm) = \pm 1$, $\mathcal{F}(M) = \infty$, где $M \in \partial G$ — бесконечно удаленная точка, достигаемая по путям, лежащим между разрезами по лучам Γ^- и Γ^+. Обратное к нему отображение обозначим $f(\zeta)$. Решение задачи относительно функции $u_0(\zeta) := U_0(f(\zeta))$ выписывается через элементарные функции, после чего функция U_0 находится по формуле $U_0(z) := u_0(\mathcal{F}(z))$. Для построения $U(z)$ применяем метод мультиполей [1], который дает $U(z)$ в виде предела последовательности $\{U_N(z)\}$ линейных комбинаций $U_N(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k^N\, \Omega_k(z)$, где функции $\Omega_k(z)$ (мультиполи), определяются по формуле $\Omega_k(z) := \operatorname{Im}[\mathcal{F}(z)]^k$, $k = 1, 2, \ldots$, а коэффициенты a_k^N являются решениями системы линейных уравнений $\sum_{l=1}^{N} (\Omega_k, \Omega_l) a_l^N = (\Omega_k, h)$, $k = \overline{1, N}$; здесь $h(z) := \varphi(z) - U_0(z)$, а через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$.

Численные эксперименты показали высокую эффективность метода при различных формах дуги Γ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.