

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В КРИВОЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ

© Д. В. Паршин, А. П. Чупахин

danilo.skiman@gmail.com, chupakhin@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Изучение пространственных движений газа представляет значительный интерес как с точки зрения многочисленных приложений, главным из которых является аэродинамика, так и с точки зрения теории нелинейных дифференциальных уравнений [1]. Известные на сегодняшний день точные решения многомерных уравнений газовой динамики (УГД) демонстрируют большое разнообразие и сложность возможных режимов течения. Теоретико-групповые методы позволяют эффективно строить и исследовать обширные классы точных решений УГД, имеющие интересные физический приложения [2, 3].

В данной работе исследуются частично-инвариантные решения УГД, описывающие установившееся движение газа в криволинейном канале переменного сечения. Такое решение обобщает на пространственный случай решение типа простой волны, описывающее поворот равномерного потока газа.

УГД на таком решении сводятся к динамической системе третьего порядка:

$$\begin{aligned} dR/d\theta &= H \cos(\psi)(R^2 - 1)(R^2 + 1)^2/(2d), \\ d\psi/d\theta &= (2Rd + H(1 - R^2)(1 + R^2)\sin(\psi))/(2Rd), \\ dH/d\theta &= Hd(2R\sin(\psi) - H(R^2 + 1)). \end{aligned} \quad (1)$$

Величины R, ψ, H являются функциями полярного угла θ .

Термодинамические параметры течения имеют следующее представление через решение системы (1):

$$\rho = (Q/Q_0)^{2/\gamma-1}, p = S_0 \rho^\gamma, \quad (2)$$

где $Q = (R^2 - 1)/(R^2 + 1)$. Компоненты вектора скорости и скорости звука в цилиндрических координатах выражаются формулами:

$$V = 2\sqrt{2b_0} \frac{R \sin(\psi)}{1 + R^2}, W = 2\sqrt{2b_0} \frac{R \cos(\psi)}{1 + R^2}, c = \sqrt{b_0(\gamma - 1)} \frac{R^2 - 1}{1 + R^2}, \quad (3)$$

$$u = \sqrt{2b_0} \frac{Hx}{r} + U(t, r, \theta), h = \sqrt{2b_0} H,$$

где V, W — радиальная и окружная компоненты скорости соответственно.

В работе [4] исследованы все особые точки и многообразия системы (1) и доказано, что они лежат на границе области определения решения системы.

В настоящей работе исследуются как непрерывные, так и разрывные решения системы (1). Исследованы поверхности, соответствующие специальным многообразиям (1) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3(R, \psi, H)$. При переходе через эти поверхности траектории системы меняют монотонность по какой-либо из переменных (R, ψ, H) .

Описаны области в фазовом пространстве, в которых траектории системы (1) продолжают до режимов типа покой и вакуум, представляющих значительный интерес с физической точки зрения.

Уравнение $d \equiv (R^2 - 1)^2 - (8/(\gamma - 1))R^2 \cos^2(\theta) = 0$ задает в пространстве $\mathbb{R}^3(R, \psi, H)$ звуковую характеристику УГД на данном решении. Решение системы (1) имеет на этой поверхности сильный разрыв. Доказано существование решений вида (1)–(3) из данного класса с сильным разрывом типа ударной волны. Для этого анализируются соотношения Ренкина – Гюгонио и доказывается возможность ударного перехода через поверхность $d = 0$.

Доказано существование решений вида (1)–(3) с компактным разрывом. Аналитические доказательства сопровождаются численными расчетами, иллюстрирующими поведение интегральных кривых системы (1) и движение газа, описываемое данным решением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ — грант № 05-01-00080, и СО РАН — грант № 2.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1978.
3. Чупахин А. П. Небарохронные подмодели типов (1, 2) и уравнений газовой динамики. Препринт ИГиЛ, 1999. № 1–99.
4. Чупахин А. П., Шахметова Ж. А. Пространственный аналог волн Прандтля–Майера // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 645–651.