Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 616–619

УДК 532.58:536.24

МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРЫВА ЖИДКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

© В. В. Пухначёв

pukhnachev@gmail.com

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В докладе сообщаются результаты, полученные в работах [1–5], а также ряд новых результатов. Рассматривается поведение свободной невесомой пленки жидкости, которая подвержена действию термокапиллярных сил. Точная постановка задачи состоит в нахождении области $\Omega_t \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$, и решения $\vec{v}(\vec{x},t),\ p(\vec{x},t),\ \theta(\vec{x},t)$ системы уравнений Навье – Стокса и теплопроводности,

$$\vec{v}_t + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\rho^{-1}\nabla p + v\Delta\vec{v},\ \nabla\cdot\vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\theta_t + \vec{v}\cdot\nabla\theta = \chi\Delta\theta \tag{2}$$

в этой области, удовлетворяющего начальным условиям

$$\Omega_0 \ \text{ задано},\ \ \vec{v}(\vec{x},0) = 0,\ \theta(\vec{x},0) = 0,\ \vec{x} = \Omega_0, \tag{3}$$

условиям на свободной части границы Γ_t области Ω_t

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = V_n,\ \vec{x}\in\Gamma_t,\ t > 0, \tag{4}$$

$$-p\vec{n} + 2\rho v D\cdot\vec{n} = -2K\sigma\vec{n} + \nabla_\Gamma\sigma, \tag{5}$$

$$\theta = \Theta(\vec{x},t) \ \text{ или} \tag{6}$$

$$\partial\theta/\partial n = q(\vec{x},t), \tag{7}$$

а также некоторым условиям на заданной части Σ границы области Ω_t, если таковая имеется. Здесь $\vec{x} = (x,y,z)$ — координатный вектор, $\vec{v} = (u,v,w)$ — вектор скорости, p — давление, θ — температура,

$$\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta_0) \tag{8}$$

— коэффициент поверхностного натяжения. Величины v (коэффициент кинематической вязкости), ρ (плотность жидкости), χ (коэффициент температуропроводности) и параметры $\sigma_0, \kappa, \theta_0$, входящие в соотношение (8), предполагаются положительными постоянными. Символ V_n в равенстве (4) обозначает скорость перемещения поверхности Γ_t в направлении единичного вектора внешней нормали $\vec{n}$. В соотношении (5) $D = [\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^*]/2$ — тензор скоростей деформаций, K — средняя кривизна поверхности Γ, $\nabla_\Gamma = \nabla - \vec{n}(\vec{n}\cdot\nabla)$ — поверхностный градиент. Функции $\Theta(\vec{x},t),\ q(\vec{x},t)$ в равенствах (6), (7) считаются заданными. Будем называть задачу (1)–(6) несвязанной задачей, а (1)–(5), (7) — связанной задачей термокапиллярной конвекции. В работе [1] изучено семейство решений несвязанной задачи вида

$$u(f+g)x,\quad v = (f-g)y,\quad w = -2\int\limits_0^z f(\zeta,t)\,d\zeta, \tag{9}$$

$$p/\rho = v w_z(z,t) - \int\limits_0^z w_t(\zeta,t)\,d\zeta - 1/2w^2(\zeta,t) + \psi(t).$$

Вследствие (1), функции $f(z,t)$, $g(z,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$f_t + f^2 + g^2 - 2f_z \int\limits_0^z f(\zeta,t)\,d\zeta = vf_{zz}, \quad g_t + 2fg - 2\int\limits_0^z f(\zeta,t)\,d\zeta = vg_{zz}. \tag{10}$$

Этому решению соответствует распределение температуры на свободной границе

$$2\Theta = l(t)x^2 + m(t)y^2 + \Theta_*(t), \tag{11}$$

где l, m, Θ_* — произвольные функции t, а начальная область Ω_0 является плоским слоем, $|z| < a$. Тогда оказывается, что в силу (4), (5), (9) область течения Ω_t останется плоским слоем $|z| < s(t)$, если на плоскостях $z = \pm s(t)$ выполняются краевые условия

$$f_z(s(t),t) = -k[l(t) + m(t)], \quad g_z(s(t),t) = -k[l(t) - m(t)], \tag{12}$$

$$ds/dt = -2\int\limits_0^{s(t)} f(z,t)\,dz, \quad t > 0, \tag{13}$$

где $k = \kappa/\rho v = \mathrm{const} > 0$. Для выполнения начальных условий (3) требуется, чтобы

$$s(0) = a > 0, \quad f(z,0) = g(z,0) = 0, \quad |z| \le a. \tag{14}$$

В зависимости от поведения функций $l(t)$, $m(t)$ возможны три ситуации: решение задачи (10), (12)–(14) существует и единственно при всех $t > 0$; ее решение существует лишь при $t \in [0, t_*)$, и при этом $s(t) \to \infty$, если $t \to t_*$; решение задачи существует только при $t \in [0, t^*)$, и при этом $s(t) \to 0$, если $t \to t^*$. В работе [1] в терминах функций $l(t)$, $m(t)$ сформулированы достаточные условия для реализации каждого из этих режимов. В работе [2] выполнены расчеты, иллюстрирующие каждый из описанных сценариев поведения решения несвязанной задачи, а также приведены результаты численного решения связанной задачи о деформации плоского слоя термокапиллярными силами. В этом решении $2\theta = \lambda(z,t)x^2 + \mu(z,t)y^2 + \varphi(z,t)$, а функции λ, μ, φ подлежат определению вместе с функциями f, g, s.

В работе [3] несвязанная задача термокапиллярной конвекции рассматривалась в приближении тонкого слоя. Оказалось, что в указанном приближении задача определения толщины пленки $h(x,y,t)$ и полей скорости и давления в ней разделяются и могут быть решены последовательно. Функция h удовлетворяет уравнению

$$h_{tt} + \sigma_0/\rho\,\nabla\cdot(h\nabla\Delta h) = \kappa/\rho\,\Delta\Theta \tag{15}$$

(здесь и далее ∇ и Δ обозначают градиент и лапласиан по переменным x, y). Для этого уравнения рассматривается начально-краевая задача

$$h = 2a, \quad h_t = 0, \quad (x,y) \in \omega, \quad t = 0, \tag{16}$$

$$\partial h/\partial N = 0, \quad \sigma_0 h\partial\Delta h/\partial N = \kappa\partial\Theta/\partial N, \quad (x,y) \in \partial\omega, \quad t > 0. \tag{17}$$

Здесь $a = \mathrm{const} > 0$, ω — ограниченная плоская область с гладкой границей $\partial\omega$, $\Theta(x,y,t)$ — заданная в полуцилиндре $\omega \times [0,\infty)$ гладкая функция, $\partial/\partial N$ — производная по направлению внешней нормали к кривой $\partial\omega$. Численные эксперименты позволяют сформулировать гипотезу о существовании в целом по времени положительного решения задачи (15)–(17) при условии малости соответствующей нормы функции Θ. Если же функция $\Delta\Theta$ отрицательна и норма ее велика, то численное решение непродолжимо за момент времени t^*. В этот момент в некоторой точке области ω толщина пленки обращается в нуль, что означает ее разрыв.

Стационарный аналог задачи (15)–(17) изучен более детально. В этом случае функция $h(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma_0\nabla\cdot(h\nabla\Delta h) = \kappa\Delta\Theta, \quad (x,y) \in \omega, \tag{18}$$

в котором функция Θ не зависит от t, условиям (17) и дополнительному условию

$$\int\limits_{\omega} h\,dx\,dy = S, \tag{19}$$

где S — заданная положительная постоянная. Сформулируем ряд полученных здесь результатов.

Предложение 1. *Предположим, что выполнены условия $\partial\omega \in C^{4+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\Theta(x, y) \in C^{2+\alpha}(\bar{\omega})$. Тогда найдется такое $\kappa_* > 0$, что при $\kappa \in [0, \kappa_*]$ задача (17)–(19) имеет, и притом единственное, решение $h \in C^{4+\alpha}(\bar{\omega})$.*

Предложение 2. *Пусть ω — круг $x^2 + y^2 = r^2 < a^2$, функция $\Theta = -\gamma r^2 + \Theta_0$, где γ и Θ_0 — постоянные, и решение задачи (17)–(19) зависит лишь от r. Существует такое $\gamma^* > 0$, что при $\gamma > \gamma^*$ задача (17)–(19) не имеет положительных осесимметричных решений.*

Рассмотрим связанную задачу о равновесии свободной неизотермической пленки с теплоизолированной свободной границей. В этом случае функция $\Theta(x, y)$ становится искомой, а задача (17)–(19) дополняется уравнением

$$\nabla(h\nabla\Theta) = 0, \quad (x, y) \in \omega, \tag{20}$$

и краевым условием

$$h\partial\Theta/\partial N = Q(x, y), \quad (x, y) \in \partial\omega, \tag{21}$$

в котором $Q(x, y) \in C^{1+\alpha}(\partial\omega)$ — заданная функция с нулевым средним значением по $\partial\omega$. Здесь имеет место аналог предложения 1 [4]. Вместе с тем, утверждение, аналогичное предложению 2, доказать не удается. Более того, в одномерном случае, когда ω есть отрезок $[0, a]$, а функции h, Θ зависят только от x (при этом $Q = \mathrm{const}$, удается доказать разрешимость задачи (17)–(21) при любом значении $|Q|$.

В заключение рассматриваются точные решения системы уравнений (15) и

$$(h\Theta)_t = \chi\nabla \cdot (h\nabla\Theta), \tag{22}$$

определенные для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Один класс таких решений образуют бегущие волны,

$$h = H(x - ct), \quad \Theta = \Xi(x - ct),$$

где $c = \mathrm{const}$. Другой класс — автомодельные решения,

$$h = h_0 F(r^2/\chi t), \quad \Theta = qt^{-1}G(r^2/\chi t), \tag{23}$$

где h_0, q — положительные постоянные. Функции $H(\xi)$, $\Xi(\xi)$ и функции $F(\eta)$, $G(\eta)$ удовлетворяют системам квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка [5]. Замечательным является факт точной редукции каждой из этих систем к системам третьего порядка.

Предложение 3. *Пусть при прочих фиксированных параметрах системы (15), (22) величина достаточно мала. Тогда эта система имеет два четырехпараметрических семейства периодических бегущих волн. Одно из них вырождается в трехпараметрическое семейство солитонов, когда длина волны стремится к бесконечности.*

Предложение 4. *Система (15), (22) обладает трехпараметрическим семейством автомодельных решений вида (23). Условие непрерывности решения при $t \to 0$ выделяет двухпараметрическое семейство решений, параметризуемое значениями h_0 и q при достаточно малых q.*

Отметим, что в процессе доказательства предложения 4 возникает нётеров линейный оператор с индексом единица, что и приводит к появлению свободного параметра в решении (23). Упомянутое условие непрерывности решения в пределе $t \to 0$ позволяет устранить возникающий произвол и сделать решение (23) физически осмысленным.

Цикл работ [1–5] выполнен в рамках программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (номера грантов 00-15-96162, НШ-902.2003.1, НШ-5873.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pukhnachov V. V.* Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // European J. of Applied Math. 2002. V. 13, №. 2, P. 205–224.
2. *Пухначёв В. В., Пухначёва Т. П.* Трехмерное нестационарное термокапиллярное движение вязкой жидкости // Известия Казахского национального университета. Серия "Математика, механика и информатика". 2002. № 2 (30). С. 96–104.
3. *Пухначёв В. В., Дубинкина С. Б.* Модель деформации и разрыва пленки под действием термокапиллярных сил // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 89–107.
4. *Пухначёв В. В.* Задача о равновесии свободной неизотермической пленки жидкости // Журнал прикл. механики и техн. физики. 2007. Т. 48, № 3 (в печати).
5. *Meleshko S. V., Pukhnachev V. V., and Pukhnacheva T. P.* Traveling waves and self-similar solutions in the model of a free non-isothermal liquid film // Submitted for publication to "Advances in Mathematical Sciences and Applications".