Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 624–625

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СВОБОДНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, $0<\alpha<1$

© Ш. С. Сахаев

dauyl@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассмотрим сосуд Ω, заполненный несжимаемой жидкостью, имеющий в начальный момент времени температуры. Пусть на поверхности $\partial\Omega \equiv S$ задана для $t>0$ распределение температуры и внутри $\Omega \subset R^3$ расположены источники тепла с данными удельным тепловым потоком. Температура жидкости в сосуде будет изменяться.

В силу неравномерной нагретости жидкости будет изменяться плотность (давление). Такой процесс называется свободной конвекцией.

Математическая постановка задачи. Ищутся вектор $\vec{v}(x,t)$ (скорость движения жидкости) и температура жидкости $\theta(x,t)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\vec{v}_t - \nu\Delta\vec{v} + \sum_{k=1}^{3} \upsilon_k \vec{v}_{x_k} + \vec{\xi}\theta = \vec{f} - \nabla p, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{2}$$

$$\theta_t - \Delta\theta + (\vec{v}, \nabla\theta) = g(x,t), \tag{3}$$

граничным

$$\vec{v}(x,t)\Big|_{x\in S} = 0, \qquad \theta(x,t)\Big|_{x\in S} = 0 \tag{4}$$

и начальным условиям

$$\vec{v}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \qquad \theta(x,t)\Big|_{t=0} = \theta_0(x). \tag{5}$$

Цель — доказательство однозначную разрешимость задачи (1)–(5) в классе Гельдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ с $0<\alpha<1$.

Если отбросить в уравнениях (1) и (3) нелинейные слагаемые, то задача (1)–(5) распадается на две линейные задачи. Эти линейные задачи в классе Гельдера изучены хорошо.

Сведем систему (1)–(5) в виде одного дифференциального уравнения. Пусть $\vec{f} \in \overset{0}{J}(\Omega)$, P — ортогональный (в $L_2(\Omega)$) проектор на $\overset{0}{J}(\Omega)$. Спроектируем обе части уравнения (1) на пространство $\overset{0}{J}(\Omega)$, чтобы исключить $\operatorname{grad} p(x,t)$. Полученные вместе с уравнением (3) можно записать в виде одного уравнения для вектора $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \theta \end{pmatrix}$ с четырьмя компонентами:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + A_0\vec{u} + K(\vec{u},\vec{u}) = \vec{F}, \tag{6}$$

где

$$A_0\vec{u} = \begin{pmatrix} \nu P\Delta\vec{v} - \vec{\xi}\theta \\ \Delta\theta \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ g \end{pmatrix},$$

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 624–625

$$K(\vec{u},\vec{u})=\begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{3} \upsilon_k \vec{\upsilon}_{x_k} \\ \vec{\upsilon}\nabla\theta \end{pmatrix}.$$

Начальные условия (5) удобно свести к однородным, при этом в левой части (6) возникнут новые линейные члены. Пусть $\vec{u}=\begin{pmatrix}\vec{\upsilon}' \\ \theta'\end{pmatrix}$, где $\vec{\upsilon}'(x,t)$ и $\theta'(x,t)$ — какие-либо функции, удовлетворяющие условиям (4), (5) (их можно построить, например, решая линейные задачи).

Тогда для $\vec{U}\equiv\vec{u}-\vec{u}'=\begin{pmatrix}\vec{\omega} \\ \eta\end{pmatrix}$ получим уравнение

$$\frac{d\vec{U}}{dt}+A_0\vec{U}+2K\left(\vec{u},\vec{U}\right)+K\left(\vec{U},\vec{U}\right)=\vec{F}_1,$$

где

$$K\left(\vec{u},\vec{U}'\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{3}\left(U_k\vec{U}'_{x_k}+U'_k\vec{U}_{x_k}\right) \\ \vec{U}\nabla\theta'+\vec{U}'\nabla\theta \end{pmatrix},$$

$\vec{F}_1=\vec{F}-\vec{u}_t-A_0u'-K\left(\vec{u}',\vec{u}'\right)|_{t=0}=K\left(\vec{u}',\vec{u}'\right)=\begin{pmatrix}\vec{f}_1 \\ g_1\end{pmatrix}$ принадлежат $\overset{0}{J}{}^{\alpha}(Q_T)\times\overset{0}{J}{}^{\alpha}(Q_T)$. Кроме того вектор-функция $\vec{U}(x,t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\vec{U}(x,t)\Big|_{t=0}=0, \tag{7}$$

а его компоненты $\vec{\omega}$ и η — нулевым краевым условиям.

Обозначим через $D^{2+\alpha}(Q_T)$ соленоидальных векторов из $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)\times C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, удовлетворяющих нулевым краевым условиям и нулевым начальным.

Имеет место следующая (основная)

Теорема. *Пусть $S\in C^{3+\alpha}$. Если выполнены условие*

$$C_1^2C_2\min(1,T)\left|\vec{F}_1\right|_{Q_T}^{(\alpha)}\le\frac{1}{4}, \tag{8}$$

где C_1 — постоянная из оценки решения линейных задач, а C_2 — из оценки $\left|K\left(\vec{u},\vec{u}\right)\right|_{Q_T}^{(\alpha)}$, то задача (6), (7) однозначно разрешима при $0\le t\le T$ в классе $\underset{0}{D}{}^{2+\alpha}(Q_T)$ и для решения справедлива оценка

$$\left|\vec{U}\right|_{Q_T}^{(2+\alpha)}\le\frac{2C_1\left|\vec{F}_1\right|_{Q_T}^{(\alpha)}}{1+\sqrt{1-C_1^2C_2\min(1,T)\left|\vec{F}_1\right|_{Q_T}^{(\alpha)}}}. \tag{9}$$

Замечание. Условие (8) гарантирует разрешимость задачи (6), (7) при произвольном $\vec{F}_1(x,t)\in J^{\alpha}(Q_T)$ в цилиндре Q_T, высота T которого зависит от нормы $\vec{F}_1$ и неограниченно растет, когда эта норма стремится к нулю. Кроме того по любому $T>0$ можно указать такое $M=M(T)$, что задача (6), (7) разрешима в $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ при любой $\vec{F}(x,t)\in J^{\alpha}(Q_T)$, норма которой меньше $M(T)$.