*Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 622–623*

*УДК 532.517.4*

# К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ

**© М. А. Саттаров**

msattarov@mail.ru

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Излагается гидромеханическое представление автора об оценке осредненных характеристик потока на основе синтеза гипотез И. Буссинеска (J. Boussinesq, 1877) и О. Рейнольдса (O. Reynolds, 1895). В результате получена некоторая модификация уравнений среднего движения Навье – Стокса с новыми дифференциальными членами, коэффициенты которых выражают такие характеристики потока реальной несжимаемой жидкости как вихревая вязкость, длина пути смешения и частота турбулентности. При определенных упрощениях из этих уравнений вытекают феноменологические уравнения Буссинеска, Л. Прандтля (L. Prandtl, 1933), Т. Кармана (Th. v. Karman, 1934), М. Д. Миллионщикова (1969) [1, 2] и др.

В рамках предлагаемой теории, уравнение осредненного турбулентного течения в плоскости $xOz$ запишем так [3]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Big[(\mu+\varepsilon^0_{xz})u_z+\varepsilon'^0_{xz}u_z^2/2+...+\nu N(x,z)\Big],\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\end{aligned}\right\}$$

где $u$, $w$; $u'$, $w'$ — компоненты осредненной и пульсационной скорости, $p$, $\rho$ и $\nu$ — давление, плотность и вязкость жидкости; $X$ — проекция объёмных сил, $N(x,z)$ — напряжения, неучтенные при осреднениях; неизвестные $-\rho\overline{u'w'}$ и $-\rho\overline{w'u'}$ рейнольдсовы напряжения отражены в коэффициентах добавочных членов полученного уравнения:

$$\varepsilon^0_{xz}/\rho=\partial(-\overline{u'w'})/\partial(\partial u/\partial z)\Big|_0,\ \ \varepsilon'^0_{xz}/\rho=\partial^2(-\overline{u'w'})/\partial^2(\partial u/\partial z)\Big|_0\equiv L^2,$$

которые, имея размерности см$^2$/с и см$^2$, представляют собой вихревую вязкость Буссинеска и прототип длины пути перемешивания Прандтля – Кармана [1].

Для свободного равномерного турбулентного потока $(u_t=0)$, считая $w=u_x=0$ и $X=p_x=0$, получен первый интеграл уравнения двумерного движения:

$$\nu(1+\overline{\varepsilon}_{xz})u_z+\ldots+\nu N(x,z)-C_1=-L^2u_z^2/2\ ,\quad u(x,z)\equiv u(z)\ .$$

Отсюда, при определенных упрощениях непосредственно следуют известные уравнения полуэмпирических теорий турбулентности.

Первый интеграл уравнения установившегося турбулентного потока с градиентом давления в трубе $\left(\sigma=1,\ \xi^2=x^2+z^2\right)$ и в канале с параллельными стенками $(\sigma=0,\ \xi=z\le\pm R)$ имеет следующий вид:

$$u_\xi^2-2\theta(\xi)u_\xi+f(\xi)-I_*\xi=0\ ,$$

где $\theta(\xi)=(\nu+\varepsilon_b)/L^2$, $f(\xi)=(2\nu(N_{x\xi}-N_{x0}))/L^2$, $I_*=2gI/(1+\sigma)L^2$, $pgI=-\partial p/\partial x$, $\theta(\xi)\equiv\varepsilon_{xz}/L^2=1/\left[\partial(\ln\varepsilon_{xz})/\partial u_\xi\right]$ — частота турбулентности $\left(\varepsilon_{xz}\equiv\partial(-\overline{u_i'u_j'})/\partial u_z>1\right)$.

Решение нелинейного уравнения при граничном условии $u(R_e) = u_e$ дает закон распределения скоростей в напорных каналах:

$$u(\xi) - u_e = \int_{\xi}^{R_e} \left[\theta(\xi) \pm \sqrt{\theta^2(\xi) + I_*\xi - f(\xi)}\right] d\xi \ ,$$

где $u_e = \sqrt{\tau_0/\rho}$, $\tau_0$ — касательное напряжение в точке $\xi = R_e$ на границе между тонким вязким подслоем и турбулентным потоком.

Далее, считая $\theta(\xi)$ и $f_0(\xi)$ в поле осредненных скоростей постоянными величинами, получим формулы осредненных характеристик турбулентного потока с градиентом давления. При этом, закон распределения скоростей имеет вид:

$$u = \theta R_e \left\{1 - \bar{\xi} - \frac{2}{3I_*\theta R_e}\left[\theta^3 - \sqrt{\left(\theta^2 + I_*\xi - f(\xi)\right)^3}\right]\right\} \ .$$

На оси потока $(\xi = 0)$ скорость достигает своего максимального значения:

$$u_{max} = \theta R_e \equiv \nu(1 + \bar{\varepsilon}_{xu}) R_e / L^2.$$

Видно, что в формировании закона распределения скоростей вязкой несжимаемой жидкости, наряду с ньютоновской вязкостью решающую роль играют и вихревая вязкость $\varepsilon_{xz}$ и длина $L$ пути смешения, которые являются параметрами новых членов дифференциальных уравнений среднего движения. В частности, с учетом равенства $\bar{\varepsilon}_{xu} = 1 + \bar{\varepsilon}_{xz}$, при заданных значениях градиента скорости для вихревой вязкости имеем:

$$\bar{\varepsilon_{xz}} = \frac{N(\xi)(1+\sigma) + gI\xi/\nu}{(1+\sigma)\left|-du/d\xi\right|} - 1, \quad \bar{\varepsilon}_{xz} = \varepsilon_{xz}/\nu \ ,$$

а в поле средней скорости она определяется соотношением:

$$\bar{\varepsilon}_U = \frac{2^\sigma I Rat_U}{4(1+\sigma)^2(3+\sigma)} - 1 \quad (Rat_U = Re_U/Fr_U) \ .$$

Показано, что вихревая вязкость $\bar{\varepsilon}_{bU}$ возникает при выполнении неравенств:

$$I Rat_U > 2^{2-\sigma}(1+\sigma)^2(3+\sigma) \ \text{ или } \ Igd^2/U > 2^{2-\sigma}\nu(1+\sigma)^2(3+\sigma) \ ,$$

и, как реальная физическая характеристика турбулентного потока, является функцией отношения чисел Рейнольдса и Фруда $Rat_{cp} = Re_{cp}/Fr_{cp}$, которое можно считать обобщенным числом динамического подобия $Rat_{cp} = gd^2/\nu U$.

В рамках полученных здесь решений осредненных дифференциальных уравнений выполнен детальный анализ данных классических опытов И. Никурадзе (J. Nikuradze, 1932, 1933) [4] в гладких и шероховатых трубах, а также опытов автора в гладких трубах из различных материалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблемы турбулентности. Пер. статей Л. Прандтля, Т. Кармана, И. Никурадзе, О. Рейнольдса и др. с англ. под. ред. М. А. Великанова. М.: ОНТИ, 1936. 332 с.
2. *Миллионщиков М. Д.* Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М.: Наука, 1969. 52 с.
3. *Саттаров М. А.* Гидромеханический метод оценки осредненных характеристик турбулентного потока // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49, № 4. С. 321–327.
4. *Nikuradze J.* Stromungsgezetze in rauchen Rohren // VDJ Forschungsheft. 1933. № 361. P. 1–22.