

УДК 517.977.58

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© Г. В. Шевченко

shevch@lmath.nsc.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В настоящей статье рассматриваются нелинейные системы со стационарной правой частью, т. е. независимой явно от времени. Для задач оптимального быстрогодействия с такими системами предлагается итерационный метод решения. Он основан на построении конечных последовательностей смежных симплексов с вершинами на границах областей достижимости. При предположении об управляемости системы доказано, что за конечное число итераций минимизирующая последовательность сходится к ε -оптимальному решению. Следуя [1], пару $\{T, u(\cdot)\}$ назовём ε -оптимальным решением, где $T \leq T_{opt}$, T_{opt} — время оптимального по быстродействию перевода системы из начального состояния в ε -окрестность начала координат, u — допустимое управление, под действием которого система переходит в ε -окрестность начала координат за время T .

Пусть управляемый объект описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(x, u), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния объекта; $x(0) = x^0$ — заданное начальное состояние объекта; $f(x, u)$ — непрерывная по x и по u и непрерывно дифференцируемая по x вектор-функция, $f(x, u)|_{x \neq 0, u \neq 0} \neq 0$, $f(0, u)|_{u \neq 0} \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$; u — s -мерный вектор управляющих воздействий, компоненты которого являются измеримыми функциями и стеснены ограничением

$$u(t) \in U; \quad (2)$$

U — компактное выпуклое тело из $\mathbb{R}^s$, причём 0 является внутренней точкой множества U .

Предполагается, что система (1) полностью управляема, т. е. управляема из любой начальной точки x^0 из $\mathbb{R}^n$ в любую точку из $\mathbb{R}^n$.

ЗАДАЧА. Требуется найти допустимое управление $u^0(t)$ ($t \in [0, T]$), переводящее систему (1) из начального состояния $x(0) = x^0$ в начало координат за минимально возможное время $T = T_{opt}$.

Эта задача эквивалентна следующей ЗАДАЧЕ: найти минимальное время $T = T_{opt}$ такое, что начало координат принадлежит границе области достижимости $\mathfrak{R}(T)$, где $\mathfrak{R}(T)$ — множество конечных состояний системы (1), в которые допустимыми управлениями можно перевести систему (1) из начального состояния x^0 за время T . Область достижимости $\mathfrak{R}(T)$ является компактным телом в $\mathbb{R}^n$.

Введём ряд понятий (см. [1]). Пусть $z^1, \dots, z^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ такие различные точки, что линейная выпуклая оболочка $\sigma = [z^1, \dots, z^{n+1}]$ этих точек является телом в $\mathbb{R}^n$. Множество σ называется n -мерным симплексом с вершинами $z^1, \dots, z^{n+1}$. Два n -мерных симплекса σ^1 и σ^2 называются смежными, если их пересечение является общей гранью максимальной размерности этих симплексов.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — компактное тело и пусть $\sigma^0 = [z_0^1, \dots, z_0^{n+1}]$ — n -мерный симплекс с вершинами на границе множества Ω . По каждой его грани максимальной размерности мы построим смежный симплекс, «новая» вершина которого является граничной точкой Ω и лежит по другую сторону точки симплекса, не принадлежащей этой грани, относительно гиперплоскости, содержащей эту грань. Построенные симплексы являются смежными к симплексу σ^0 и называются симплексами первого слоя. Симплекс σ^0 считается симплексом 0-го слоя.

Аналогично строим смежные симплексы для каждого симплекса первого слоя за исключением граней, общих с $(n-1)$ -мерными гранями симплекса σ^0 . Построенные симплексы составляют второй слой. По такой же схеме строятся смежные симплексы $(k+1)$ -го слоя для каждого симплекса из k -го слоя ($k \geq 2$).

Через $\mathfrak{S}_k$ обозначим объединение всех симплексов k -го слоя. По построению в силу компактности множества Ω имеет место соотношение $\text{co}(\Omega) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k \doteq \Pi_{\Omega}$, где $\text{co}(\Omega)$ — выпуклая оболочка внутренности множества Ω . Тем самым доказана следующая

Теорема (о симплексном покрытии). *Внутренность любого компактного тела Ω в $\mathbb{R}^n$ можно покрыть n -мерными симплексами с вершинами на границе множества Ω .*

Из теоремы 1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть Ω — компактное тело в $\mathbb{R}^n$ и точка $z^0 \in \text{co}(\Omega)$. Тогда для любого ее симплексного покрытия Π_{Ω} найдутся конечное $k_0 \geq 0$ и n -мерный симплекс $\sigma \in \mathfrak{S}_{k_0}$ такой, что $z^0 \in \sigma$.

Следствие 2. Пусть Ω — компактное тело в $\mathbb{R}^n$ и точка $z^0 \notin \text{co}(\Omega)$. Тогда для любого ее симплексного покрытия Π_{Ω} найдутся конечное $k_0 \geq 0$ и по меньшей мере один n -мерный симплекс $\sigma \in \mathfrak{S}_{k_0}$ такой, что опорная к Ω в некоторой вершине σ гиперплоскость строго отделяет Ω от точки z^0 .

Пусть $T > 0$ фиксировано. Тогда найдутся такое конечное $\ell \geq 1$ и такой симплекс симплекс $\sigma' \subset \Pi_{\mathfrak{R}(T)}$, что либо 1) опорная гиперплоскость к некоторой вершине σ' отделяет $\text{co} \mathfrak{R}(T)$ от начала координат; либо 2) $0 \in \sigma'$. В первом случае $T < T_{\text{opt}}$. Во втором случае возможны две ситуации: $0 \in \mathfrak{R}(T)$ или $0 \notin \mathfrak{R}(T)$. Проверить, что имеет место, далеко не просто, поскольку в общем случае невозможно построить область достижимости. Поэтому разработана итерационная процедура проверки принадлежности начала координат множеству $\mathfrak{R}(T)$, которая используется в предлагаемом методе решения задачи оптимального быстрогодействия. Он состоит из двух этапов.

На первом этапе строятся монотонно возрастающая последовательность времён $\{T_k\}$ и последовательность симплексов $\{\sigma^k\}$ с вершинами на границе области достижимости $\mathfrak{R}(T_k)$. Построение заканчивается, когда очередной построенный симплекс поглотит начало координат. Следует отметить, что построение ведётся так, что если $T_k = T_{k+1}$, то симплексы σ^k и σ^{k+1} являются смежными и $\rho(\sigma^k) \geq \rho(\sigma^{k+1})$, где $\rho(\sigma)$ — расстояние от начала координат до

$$\text{симплекса } \sigma = [z^1, \dots, z^{n+1}], \text{ т. е. } \rho(\sigma) = \min_{\sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i z^i \right\|^2.$$

На втором этапе для уточнения оптимального времени используется описанная процедура проверки принадлежности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00776).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевченко Г. В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстрогодействия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, т 8. С. 1184–1196.
2. Шевченко Г. В. Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида // Автометрия. 2006. Т. 42, т 2. С. 49–67.