Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 632–633

УДК 519.86 : 53.072

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВУХПУЧКОВОГО ЛАЗЕРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© В. Н. Старков*, А. С. Политыло

* vjachnikstar@svitonline.com

Институт физики НАН Украины, Киев, Украина

Важнейшим физическим результатом последних лет в динамической голографии явилось экспериментальное обнаружение и теоретическое обоснование существования оптической бистабильности, которое позволяет исследовать физические процессы в условиях, далеких от равновесных состояний [1, 2]. Оптическая бистабильность привлекает внимание исследователей перспективами создания новой технологии конструирования и производства различных элементов оптических систем обработки информации.

Математическая модель стационарного четырехпучкового обращения волнового фронта световых пучков в электрооптических кристаллах с диффузионной нелинейностью при условии, что волна $v_2(x)$ некогерентна к волнам $v_1(x)$ и $v_3(x)$, может быть представлена краевой задачей относительно интенсивностей $v_i(x) \in C^{(1)}(0,a) \cap C[0,a]$ и разности фаз $\Phi(x) \in C^{(1)}(0,a) \cap C[0,a]$ [2]:

$$v_1' = -v_3' = v_0^{-1}\left[v_1 v_3 + \mu(v)\cos\Phi\right], \quad v_2' = -v_4' = v_0^{-1}\left[v_2 v_4 + \mu(v)\cos\Phi\right],$$

$$\Phi' = \delta + (2v_0)^{-1}\left(v_3^{-1} + v_4^{-1} - v_1^{-1} - v_2^{-1}\right)\mu(v)\sin\Phi, \quad x \in (0,a), \tag{1}$$

где $x = 2x' k_0 \Delta\chi / \cos\vartheta -$ безразмерная координата по толщине кристалла, x' — размерная координата, $\delta = \chi \sin 2\vartheta / (4\Delta\chi)$ — параметр рассогласования, $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\Delta\chi$ — амплитуда модуляции показателя преломления диффузионным полем, $\mu(v) \equiv \left(\prod_{i=1}^{4} v_i\right)^{1/2}$, $v_0 \equiv \sum_{i=1}^{4} v_i(x)$ — суммарная интенсивность, 2ϑ — угол схождения $v_1(x=0) = v_{12}$ — опорной и $v_3(x=0) = v_{32}$ — сигнальной волн; $v_2(x=a) = v_{21}$ — встречная опорная волна; $v_4(x=a) = 0$; $\Phi(x=a) = \Phi_0$. В работе [3] доказана

Теорема. *Введение искомой функции $z(x)$ такой, что*

$$v_1(x) = \alpha\sin^2\left[(z(x)+\eta)/2\right], \quad v_2(x) = \beta\cos^2(z(x)/2), \quad \alpha = v_{12} + v_{32}, \quad \beta = v_{21} + v_{41},$$

$$v_3(x) = \alpha\cos^2\left[(z(x)+\eta)/2\right], \quad v_4(x) = \beta\sin^2(z(x)/2), \tag{2}$$

позволяет свести краевую задачу для системы (1) к решению трансцедентного уравнения:

$$[1+\cos(z_1+\theta)]\,[1-\cos(z_2+\theta)] - e^{-ar}\,[1-\cos(z_1+\theta)]\,[1+\cos(z_2+\theta)] = 0,$$

где $z(x) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\left((z_1+\theta)/2\right)\exp\left(r(x-a)/2\right)\right] - \theta$, $z_1 = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{v_{41}/v_{21}}$,

$$\theta = \mathrm{arctg}\left[\alpha\sin B\,(\alpha\cos B - \beta)^{-1}\right], r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos B}, z_2 = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{v_{12}/v_{32}} - B. \tag{3}$$

Одним из следствий теоремы является возможность анализа условий появления многозначного (S-образного) характера зависимости интенсивности обращенной волны $v_4(0)$ от интенсивности сигнальной волны $v_3(0)$.

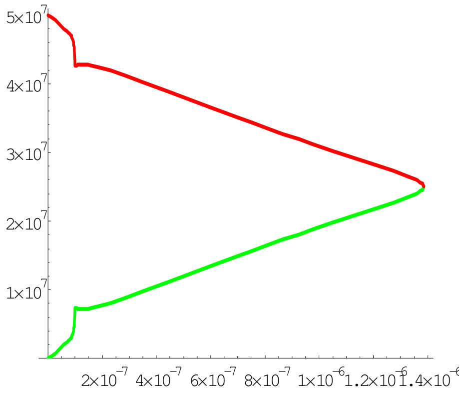

Рис. 1.

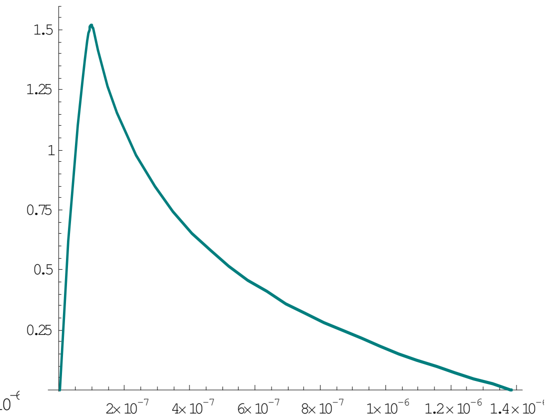

Рис. 2.

Разработчиков оптических систем обработки информации интересуют вопросы поведения бистабильных состояний во времени, проблемы устойчивости стационарных состояний. Возникает задача исследования нестационарных эффектов при четырехпучковом обращении волнового фронта. Первым этапом на пути ее решения является исследование математической модели нестационарного двухпучкового энергообмена при записи просветных динамических голограмм. Рассматривается модель, суть которой состоит в описании нелинейным интегральным уравнением Вольтерра нестационарного энергообмена между двумя попутными волнами в среде с локальным нелинейным откликом при учете времени его релаксации относительно комплексной функции $w\,(x,t)$ [4, 5]

$$w\,(x,t) = -ik\eta \int\limits_0^x \int\limits_0^t v_0\,(\tau)\,\sqrt{1-|w\,(z,t)|^2}\,w\,(z,\tau)\exp\left[(\tau-t)\,/T\right]\,d\tau\,d\,z + w_0\,(t), \qquad (4)$$

где $w_0\,(t) = w\,(x=0,t)$. Наряду с компактностью и четкой физической интерпретацией такая модель позволяет достаточно просто получить приближенное решение задачи. Через $w\,(x,t)$ можно определить разность фаз $\Phi\,(x,t)$, интенсивности $v_{1,2}\,(x,t)$ и амплитуду решетки диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon\,(x,t)$.

При разработке алгоритма численного решения уравнения (4) необходимым условием проверки достоверности его программной реализации является наличие тестового примера нахождения искомой функции. В работе подробно обсуждаются результаты вычислительного эксперимента с предложенной математической моделью. В качестве примера приближенного решения уравнения (4) в аналитической форме построена вторая итерация $w_2\,(x,t)$, когда за нулевое приближение принимается функция

$$w_0\,(x,t) = w_0\,(t) = 2\sqrt{y\,(1-y)}, \quad y = \exp\,(-t/2T)\,.$$

Распределение интенсивностей $v_{1,2}^{(2)}\,(0.2,\ t)$ и разность фаз $\Phi^{(2)}\,(0.2,\ t)$ показаны на рис. 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гиббс Х.* Оптическая бистабильность: Пер. с анг. М.: Мир, 1988. 520 с.
2. *Кухтарев Н. В., Старков В. Н.* Оптическая бистабильность при обращении волнового фронта световых пучков в электрооптических кристаллах с диффузионной нелинейностью // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7, вып. 11. С. 692–695.
3. *Старков В. Н.* О многозначности решения задачи обращения волнового фронта лазерных пучков в электрооптических кристаллах. Препр. АН СССР. ВЦ СО, “Вычислит. математика”; № 2. Красноярск: 1982. С. 41–42.
4. *Старков В. Н.* Нелинейные интегральные уравнения в задачах динамической голографии // Тез. доп. Міжнар. конф. “Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань”. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. С. 165–166.
5. *Старков В. Н.* Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. Киев: Наук. думка, 2002. 264 с.