

МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА (ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КОНВЕКЦИИ)

© А. Ф. Воеводин*, Т. В. Протопопова

* voevodin@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Системы уравнений составного типа (параболо-эллиптические) часто применяются для описания таких физических процессов как движение изотермической и теплопроводной вязкой несжимаемой жидкости (система уравнений Навье – Стокса и система уравнений конвекции в приближении Обербека – Буссинеска). Одной из особенностей этих систем уравнений является пространственно-эллиптический характер решений. Поэтому для решения используются типичные для эллиптических уравнений методы, при этом требуется постановка граничных условий на всех границах рассматриваемой области. При численном моделировании подобных задач одним из традиционных подходов является переход к новым переменным: функция тока — вихрь для плоских течений и вектор вихря — векторный потенциал для пространственных течений. При таком подходе уравнение неразрывности выполняется автоматически, что особенно важно в случае, когда нет оттока или притока жидкости в рассматриваемую область. Однако в этом случае возникает проблема постановки и корректной реализации граничных условий на твердых стенках.

В работах [1–3] предложен и достаточно строго теоретически обоснован эффективный численный метод решения систем уравнений конвекции в замкнутых областях. В основе метода лежит идея расщепления по физическим процессам. Процесс трансформации функции вихря представляется в виде двух этапов: конвективный перенос по траекториям при заданном поле скоростей на нижнем временном слое и диффузионный перенос, обусловленный вязкими членами и градиентом температуры. При этом на первом этапе рассматривается уравнение переноса, для которого в силу условий прилипания не требуется задания граничных условий, что позволяет построить энергетически нейтральные разностные схемы, сохраняющие норму типа L_2 для функции вихря. Хотя матрица системы разностных уравнений на данном этапе не обладает свойством диагонального преобладания, показано, что метод прогонки для неё устойчив. Реализация разностной начально-краевой задачи на этапе диффузии осуществляется на основе оригинального безытерационного двухполюсного метода, позволяющего точно реализовать разностные граничные условия для вихря на твердой стенке. На этом этапе при решении уравнения Пуассона для функции тока методом дробных шагов на каждом итерационном шаге получается система разностных уравнений с матрицей, которая отличается от трехдиагональной наличием двух ненулевых столбцов. Возникновение такой неклассической задачи обусловлено отсутствием граничных условий для вихря и наличием двух граничных условий для функции тока на твердых стенках. Метод реализован как на основе использования схем второго порядка, так и с использованием схем повышенного порядка точности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-5873.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин А. Ф. Об устойчивости разностных граничных условий для функции вихря на твёрдой стенке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 5. С. 855–859.
2. Воеводин А. Ф., Юшкова Т. В. Численный метод решения начально-краевых задач для уравнений Навье – Стокса в замкнутых областях на основе метода расщепления // Сиб. журн. вычисл. математики. 1999. Т. 2, № 4. С. 321–332.
3. Voevodin A. F., Protopopova T. V. The use of higher-order schemes to compute viscous incompressible flows // Proc. of the Int. Conf. on Computational Mathematics. Novosibirsk. 2002. P. 722–727.