Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 580–581

УДК 519.6

ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

© А. И. Зейфман *, Я. А. Сатин, Г. Н. Шилова

* zai@uni-vologda.ac.ru

Вологодский государственный педагогический университет и ВНКЦ ЦЭМИ РАН, Вологда

Марковские модели теории массового обслуживания, описываемые процессами рождения и гибели (далее ПРГ), исследуются и применяются очень давно, см., например, [1].

Более реалистические модели массового обслуживания, описываемые нестационарными марковскими цепями, активно изучаются, начиная с [2, 3]. Построение предельного режима и нахождение явных формул для вероятностей состояний таких моделей, как правило, невозможно, поэтому основной интерес, естественно, связан с вопросами аппроксимации различных характеристик таких систем, см. [5, 7, 8].

Интерес к изучению нестационарных марковских моделей систем обслуживания возрастает в последние годы в связи с появлением новых методов исследования, см., например, работы [4, 6].

Две важных характеристики — предельное среднее и двойное среднее — введены и изучены для процессов с периодическими интенсивностями в [9].

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$ — “вспомогательный” неоднородный ПРГ с пространством состояний $E = \{0, 1, \ldots\}$, интенсивности рождения $\lambda_n(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_{n+1}(t)$, $t \geq 0$, $\quad n \in E$, которого являются периодическими функциями от времени t с периодом 1.

Рассмотрим теперь основной (“возмущенный”) ПРГ $X^*(t)$, $t \geq 0$, с тем же пространством состояний E и интенсивностями рождения $\lambda^*_n(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu^*_{n+1}(t)$, $t \geq 0$, $\quad n \in E$, для которого выполнены аналогичные стандартные условия, а вместо 1-периодичности предполагается, что $\lambda^*_n(t) - \lambda_n(t) = \hat{\lambda}_n(t)$, $\mu^*_n(t) - \mu_n(t) = \hat{\mu}_n(t)$, где "возмущения"интенсивностей $|\hat{\lambda}_n(t)| \leq \varepsilon((t)$, $|\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon(t)$, причем $\varepsilon(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

В [9] введены следующие определения: ПРГ $X(t)$ имеет предельное среднее $\phi(t)$, если $\lim_{t\to\infty} |E\{X(t)\,|X(0) = k\} - \phi(t)| = 0$ для любого $k \in E$. Здесь $E\{X(t)\,|X(0) = k\}$ — среднее для процесса в момент времени t при условии, что $X(0) = k$.

Двойным средним для $X(t)$ называется предел $\mathsf{E} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t E\{X(u)\,|X(0) = k\}\,du$, если он существует и не зависит от k.

Рассмотрим вспомогательную последовательность $1 = d_{-1} = d_0 \leq d_1 \leq \ldots$ и положим

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k(t), \quad k \geq 0,$$

а затем $\alpha(t) = \inf_{k\geq 0} \alpha_k(t)$ и $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t)\,dt$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть для “невозмущенного” ПРГ $X(t)$ найдется последовательность $\{d_j\}$ такая, что $\alpha^* > 0$. Пусть, кроме того, $\inf_{k\geq 1} \frac{d_{k-1}}{k} = \omega > 0$. Тогда возмущенный процесс $X^*(t)$ имеет те же предельные характеристики: предельное среднее $\phi(t)$, и двойное среднее E.*

Кроме того, получены оценки скорости сходимости и описан метод построения предельного и двойного среднего.

Далее изучается второй случай, относящийся к ситуации, когда “невозмущенны” ПРГ является сильно эргодичным, то есть имеет постоянное предельное распределение вероятностей состояний. Для этого достаточно, например, чтобы интенсивности рождения и гибели были пропорциональны одной и той же локально интегрируемой неотрицательной функции. Доказывается, что в этом случае при выполнении тех же стандартных условий "возмущенный" ПРГ имеет постоянное предельное среднее, и строятся оценки погрешности аппроксимации предельных характеристик.

В качестве примера рассматривается система обслуживания $M(t)/M(t)/N$ с различными N.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-01-00111.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания М.: Наука, 1987.
2. *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. С. 1696–1698.
3. *Гнеденко Б. В., Соловьев А. Д.* Об условиях существования финальных вероятностей марковского процесса // Math. Operationsforsh. Stat. 1973. P. 379–390.
4. *Abramov V., Liptser R.* On existence of limiting distribution for time-nonhomogeneous countable Markov process // Queueing Systems. V. 46. P. 353–361.
5. *Di Crescenzo A., Nobile A.G.* Diffusion approximation to a queueing system with time dependent arrival and service rates // Queueing Systems. 1995. V. 19. P. 41–62.
6. *Granovsky B., Zeifman, A.* Nonstationary Queues: Estimation of the Rate of Convergence // Queueing Systems. 2004. V. 46. P. 363–388.
7. *Margolius B.* Sample path analysis of the $M_t/M_t/c$ queue // Queueing Systems. 1999. V. 31. P. 59–93.
8. *Massey W. A., Whitt W.* On analysis of the modified offered-load approximation for the nonstationary Erlang loss model // Ann. Appl. Probab. 1994. V. 4. P. 1145–1160.
9. *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing systems. 2006. V. 52, P. 139–151.