

УДК 517.529

## ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ГРУБЫХ СИСТЕМ

© Г. А. Зеленков

mathshell@mail.ru

Морская государственная академия им. Ф. Ф. Ушакова, Новороссийск

В настоящей работе ставится задача об исследовании областей неустойчивости полиномов в пространстве коэффициентов. Этому до сих пор уделялось мало внимания. Будем считать, по определению, что полиномы степени  $n$  с вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n \\ a_0 > 0, a_n &\neq 0\end{aligned}\quad (1)$$

находятся в классе  $(n, k)$ -эквивалентности, если они не имеют нулевых и чисто мнимых корней [1]. Кроме того, в правой полуплоскости находятся с учетом кратностей ровно  $k$  корней всех полиномов указанного семейства.

Имеет место следующий критерий.

**Теорема 1.** Пусть полином

$$\varphi(S, q) = a_0(q) + a_1(q)S + \dots + a_n(q)S^n, q \in Q, Q \in R^m, a_n(q) \neq 0, a_0(q) > 0 \quad (2)$$

принадлежит классу  $(n, k)$ -эквивалентности при некотором  $q_0 \in Q$ ,  $Q$  — связно. Тогда семейство  $\varphi(S, q), q \in R^m$  принадлежит классу  $(n, k)$ -эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$0 \notin S(\omega) = \{\varphi(j\omega, q) : q \in Q, \omega \in (0, +\infty)\}. \quad (3)$$

Условие (3) означает, что в  $R^3$  ( $S(\omega)$  — сечение) семейство годографов полиномов  $\varphi(S, q)$  образует связную трехмерную область, которая при  $\omega \rightarrow +\infty$  “движется” в направлении угла  $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$ , поворачиваясь вокруг оси  $0\omega$  и не пересекает эту ось. В отличие от принципа исключения нуля для семейства устойчивых полиномов [2] монотонности и последовательного прохождения октантов (квадрантов на плоскости) для  $S(\omega)$  может не быть.

Назовем, по определению, интервальный полином с вещественными коэффициентами

$$\tilde{P}_{n,k}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n, \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, i = \overline{1, n}\} \quad (4)$$

интервальным полиномом класса  $(n, k)$ -эквивалентности, если любой полином из этого семейства принадлежит классу  $(n, k)$ -эквивалентности.

Пусть для определенности  $a_0 > 0$ ,  $a_n > 0$ .

Четыре полинома, коэффициенты, которых составлены из крайних значений их интервалов по аналогии с [2] назовем *угловыми полиномами*  $\varphi_1(s)$ ,  $\varphi_2(s)$ ,  $\varphi_3(s)$ ,  $\varphi_4(s)$  интервального полинома  $\tilde{P}_{n,k}(s)$ .

Точнее:

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \dots \\ \varphi_2(s) &= \overline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s^3 + \dots \\ \varphi_3(s) &= \overline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots \\ \varphi_4(s) &= \underline{a}_0 + \overline{a}_1 s + \overline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots\end{aligned}\quad (5)$$

**Теорема 2.** Интервальный полином  $\tilde{P}(s)$  принадлежит классу  $(n, k)$ -эквивалентности  $n, k$

тогда и только тогда, когда:

1. Угловые полиномы (5) находятся в классе  $(n, k)$ -эквивалентности.
2. Для всех вещественных корней полиномов  $\underline{U}(\omega), \overline{U}(\omega), \underline{V}(\omega), \overline{V}(\omega)$  выполняются следующие условия: если  $\underline{U}(\omega) = 0$  или  $\overline{U}(\omega) = 0$ , то  $\underline{V}(\omega)\overline{V}(\omega) > 0$ ; если  $\underline{V}(\omega) = 0$  или  $\overline{V}(\omega) = 0$ , то  $\underline{U}(\omega)\overline{U}(\omega) > 0$ , где

$$\begin{aligned}\underline{U}(\omega) &= \underline{a}_0 - \overline{a}_2\omega^2 + \underline{a}_4\omega^4 - \dots; \\ \overline{U}(\omega) &= \overline{a}_0 - \underline{a}_2\omega^2 + \overline{a}_4\omega^4 - \dots; \\ \underline{V}(\omega) &= \underline{a}_1 - \overline{a}_3\omega^3 + \underline{a}_5\omega^5 - \dots; \\ \overline{V}(\omega) &= \overline{a}_1 - \underline{a}_3\omega^3 + \overline{a}_5\omega^5 - \dots\end{aligned}$$

Напомним, что  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  — реальная и мнимая части годографа Михайлова. Доказательство опирается на теорему 1 и критерий Михайлова. Теорема 2 является обобщением известной теоремы Харитонов [2], которая является ее частным случаем при  $k = 0$ . Следует отметить, что в теореме Харитонов не нужно проверять второе условие.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеленков Г. А., Зубов Н. В., Неронов В. Ф. Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов // Труды ИСА РАН. 2005. Т. 17, № 1. С. 145–149.
2. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.