

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА

© Ю. М. Григорьев

grigyum@yandex.ru

Якутский государственный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

В двумерных задачах математической физики эффективным аналитическим аппаратом являются различные теории функций комплексного переменного. Определяющий вклад в одну из таких теорий сделал И. Н. Векуа. В его монографии [1] построена практически законченная теория обобщенных аналитических функций комплексного переменного. Многими исследователями ведутся работы по построению обобщений методов комплексных функций для многомерного случая. Развиваются различные варианты гиперкомплексных функций — кватернионный анализ, клиффордов анализ и др. [2–6]. В данной работе рассмотрена неклассическая, имеющая практическое значение, задача для системы Стокса. Показано, что эта задача сводится к задаче продолжения регулярных кватернионных функций неполной кватернионной переменной с куска границы на всю область.

Система Стокса, описывающая медленные течения вязкой несжимаемой жидкости, получается линеаризацией уравнений Навье – Стокса и в стационарном случае имеет вид: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} = 0$, здесь $p(\mathbf{r}) \equiv p(x, y, z)$ — давление, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — вектор скорости, μ — динамический коэффициент вязкости. Модель такой жидкости находит самые разнообразные применения при решении различных, в том числе и чисто технических, задач. Даже в случае полета тел с достаточно высокой скоростью, но в разреженных слоях атмосферы можно применить такую модель “ползущего течения”, т. к. из-за малой плотности разреженного воздуха обеспечивается малость числа Рейнольдса. Система Стокса также используется при моделировании переноса внутренних масс планет приливными деформациями. Кроме этого система Стокса совпадает с уравнениями равновесия несжимаемого упругого тела.

Если ввести функции f_0 и $\mathbf{f}$, связанные с решением системы Стокса соотношениями

$$f_0 = p, \quad \mathbf{f} = \mu \nabla \times \mathbf{v}, \quad (1)$$

то $f = f_0 + \mathbf{f}$ будет леворегулярной кватернионной функцией неполной кватернионной переменной $\mathbf{r} = ix + jy + kz$. Эта связь между системой Стокса и кватернионными функциями была известна давно, но эффективное использование этого факта для решения краевых задач отсутствует. Условие (лево)регулярности таких функций кратко записывается в виде: $\nabla f = 0$, где оператор $\nabla = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z$ действует как кватернионный. Это условие в скалярном виде называется системой Моисила – Теодореску, которая является трехмерным обобщением системы Коши – Римана из комплексного анализа.

Справедлива следующая

Теорема. Общее решение системы Стокса в классе функций $\mathbf{v} \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, $p \in C^1(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ выражается через произвольную регулярную кватернионную функцию f , $g \in \mathcal{R}(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ и первообразную $F \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ функции f в виде

$$2\mu \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -3F(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})\mathbf{r} + g(\mathbf{r}), \quad p = -2f_0, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}. \quad (2)$$

При этом выполняется тождество $f(\mathbf{r}) \equiv -\frac{1}{2}[p + \mu \nabla \times \mathbf{v}]$, $\mathbf{r} \in \bar{\Omega}$, а за функцию F можно взять любую первообразную $F \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ функции f , подчинив g условию: $g_0(\mathbf{r}) = 3F_0(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \bar{\Omega}$.

Функцию F называют первообразной регулярной функции f , если она связана с f соотношением $\nabla F = f$. Приведенная теорема обобщает формулы Колосова – Мусхелишвили из плоской теории упругости на трехмерные задачи гидродинамики.

Рассмотрим жидкость, занимающую конечную область $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Граница S области Ω является достаточно гладкой и состоит из двух кусков S_1 и S_2 , отделенных также достаточно гладким контуром. Пусть на части S_1 границы области известны давление, скорости и касательные вязкие напряжения, а на другой части S_2 граничные условия неизвестны. Такая задача может практически возникнуть в различных ситуациях, когда необходимо найти течение жидкости в некоторой области, если имеется возможность провести полные измерения и найти давление, скорости и вязкие напряжения только на части границы этой области. Подчеркнем, что вся граница области считается известной, т. е. этот класс задач отличается от традиционных задач гидродинамики со свободной границей.

Справедлива следующая

Лемма. По заданным на S_1 значениям вектора скорости и касательных компонент напряжений однозначно определяются граничные значения ротора вектора скорости на S_1 .

Отсюда следует, что если на S_1 задано еще давление p , то по граничным значениям скорости и касательных напряжений на S_1 будут известны все компоненты регулярной кватернионной функции f , которая связана с решением системы Стокса соотношениями (1). Восстановление по этим условиям регулярной функции есть задача регулярного продолжения кватернионной функции с куска границы — прямой аналог задачи аналитического продолжения. После нахождения f можно воспользоваться кватернионным представлением (2) общего решения системы Стокса, функция f в этом представлении отличается множителем $-1/2$ от функции f , определенной соотношениями (1) выше. При этом необходимо найти одну из первообразных F функции f . Затем для оставшейся функции g с помощью (2) найдем ее граничные значения на куске S_1 и решим задачу ее продолжения. Таким образом, рассмотренная неклассическая задача сведена к двум задачам продолжения регулярных кватернионных функций с куска границы. Такие задачи, как известно, относятся к классу условно-корректных краевых задач математической физики. Если решение такой задачи существует, то оно единственно, но неустойчиво по отношению к изменению граничных данных. Кроме этого, эта задача фактически является задачей Коши для системы Стокса, т. к. согласно лемме из граничных условий определяются и нормальные производные компонент скорости. В настоящее время в основном развивается метод функций Карлемана для этой задачи, что не очень удобно для приложений. Рассмотренная задача является аналогом $(u - p)$ -задачи из теории упругости [7]. Для устойчивого численного решения $(u - p)$ -задачи оказался эффективным подход, основанный на использовании теории системы Моисила – Теодореску, причем использовался матричный формализм из [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 510 с.
2. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. Clifford analysis. (Research notes in math., 76).— Boston: Pitman Adv. Publ. Pr., 1982.— 308 p.
3. Григорьев Ю. М., Наумов В. В. Аппроксимационные теоремы для системы Моисила – Теодореску // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 25, № 5. С. 9–19.
4. Gurlebeck K., Sprossig W. Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. Berlin: Akademie-Verlag, 1989. 254 p.
5. Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука и техника, 1989. 200 с.
6. Ryan J., Sprossig W. Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. Vol. 2. Clifford Analysis. Boston etc.: Birkhauser, 2000. XXII. 320 p. (Progress in Physics. Vol. 19).
7. Шваб А. А. Решение обратной задачи теории упругости методом граничного интегрального уравнения для голоморфного вектора // Физика Земли. 1994. № 4. С. 62–67.
8. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 320 с.