

УДК 539.3

КОРРЕКТНОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

© В. Ф. Кириченко

saratuni@list.ru

Саратовский государственный технический университет, Саратов

В рамках подхода И. В. Мещерского полая оболочка определяется как распределенная механическая система переменной массы, занимающая в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ область $\overline{D} = \overline{\Omega} \times [-\frac{h(t)}{2}, \frac{h(t)}{2}] \subset \mathbb{R}^3$, при этом пространство $\mathbb{R}^3$ параметризовано декартовой системой координат, (x_1, x_2, x_3) — координаты точки в $\mathbb{R}^3$; уравнение $x_3 = 0$ определяет срединную поверхность оболочки; $[t_0, t_1]$ — отрезок времени наблюдения за эволюцией оболочки; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — измеримая по Лебегу односвязная область с границей $\partial\Omega$; функция $h(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, определяет толщину оболочки в момент времени t ; $h(t) \geq \alpha > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, $\alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$, $h_0 = h_0(t)$; $D = \Omega \times (-\frac{h(t)}{2}, \frac{h(t)}{2})$; $\Gamma = \partial\Omega \times [t_0, t_1]$; $Q = \Omega \times (t_0, t_1)$; n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Исследуемая система эволюционных уравнений, соответствующая одному из вариантов геометрически нелинейной теории оболочек Рейсснера, с начальными и граничными условиями (первая начально-краевая задача) имеет такой вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \rho \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} dx_3 \right) - \int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \left(\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} \right) dx_3 = 0, \quad (1)$$

$$\int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \left\{ -\frac{\partial A \sigma_{ii}}{\partial x_i} - \frac{\partial A \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} + \left(1 - \frac{\partial B}{\partial x_3} \right) \sigma_{i3} \right\} dx_3 = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \rho \frac{\partial u_{30}}{\partial t} dx_3 \right) + \int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \varepsilon \frac{\partial u_{30}}{\partial t} dx_3 - \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \left(B \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \sigma_{ii} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} + \right. \right. \\ & \left. \left. \left[1 - \frac{dB}{dx_3} \right] \sigma_{i3} + \sigma_{12} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} + B \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} \right) dx_3 + \int_{-h(t)/2}^{h(t)/2} k_i \sigma_{ii} dx_3 \right\} = g(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_{30}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad u_{i0}|_{\Gamma} = 0, \quad u_{i1}|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_{i0}(x_1, x_2, t_0) &= \varphi_{i0}, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t}(x_1, x_2, t_0) = \psi_{i0}, \\ u_{30}(x_1, x_2, t_0) &= \varphi_{30}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial t}(x_1, x_2, t_0) = \psi_{30}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где $u_{i0} = u_{i0}(x_1, x_2, t_0)$, $u_{i1} = u_{i1}(x_1, x_2, t_0)$, $u_{30} = u_{30}(x_1, x_2, t_0)$ — искомые функции; ε , ρ , E , ν , k_i — строго положительные вещественные постоянные, $0 < \nu < \frac{1}{2}$;

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{3-i,3-i}), \quad \sigma_{i3} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{i3}, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12};$$

$$\varepsilon_{i3} = \frac{1}{2} \left[\frac{dA}{dx_3} u_{i1} + \left(1 - \frac{dB}{dx_3} \right) \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right],$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_i} + A \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right) - k_i u_{30} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u_{i0}}{\partial x_{3-i}} + A \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_{3-i}} - \frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left(B \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial u_{30}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_2} \right]; \quad A = x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_0^2}, \quad B = \frac{4x_3^3}{3h_0^2};$$

$g(x_1, x_2, t)$ — интенсивность поперечной нагрузки; $\varphi_{30}(x_1, x_2)$, $\psi_{30}(x_1, x_2)$, $\varphi_{i0}(x_1, x_2)$, $\psi_{i0}(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$) — известные функции, определяющие начальные условия (5).

Далее используем обозначения функциональных пространств из [1]; символ $|\cdot|_\Omega$ обозначает норму в пространстве $L^2(\Omega)$.

Теорема. Пусть $\partial\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения, и выполняются такие условия:

$$g(x_1, x_2, t) \in L^2(Q), \quad \varphi_{i0} \in H_0^1(\Omega), \quad \psi_{i0} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi_{30} \in H_0^2(\Omega), \quad \psi_{30} \in H_0^1(\Omega), \quad h(t) \in C^1([t_0, t_1]).$$

Тогда

1) существует хотя бы одно решение $\{\tilde{u}_{i0}, \tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{30}\}$ задачи (1)–(5), при этом

$$\tilde{u}_{i0}, \tilde{u}_{i1} \in L_\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \quad i = 1, 2, \quad \tilde{u}_{30} \in L_\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \in L_\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \tilde{u}_{i0}}{\partial t} \in L_\infty(t_0, t_1; L^2(\Omega));$$

2) решение задачи (1)–(5) может быть продолжено на интервал (t_0, ∞) .

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты подобные сформулированным в теореме имеют место и при других случаях закрепления оболочек, например, оболочка может быть шарнирно оперта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.