

УДК 517.97

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИОННАЯ ЗАДАЧА О РАЗВИТИИ ТРЕЩИНЫ

© В. А. Ковтуненко

kovtuneneko@hydro.nsc.ru

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;
Institute for Mathematics, Karl-Franzens University of Graz, Graz, Austria*

Используя оптимизационный подход, рассматривается следующая нелинейная эволюционная задача о развитии трещины Γ_C в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, относительно временного параметра t : Найти $\Gamma_C(t) \in \Sigma(\Omega)$ при $t \geq 0$, такое что

$$u(t) \in K(\Omega \setminus \Gamma_C(t)), \quad T(u(t); \Omega \setminus \Gamma_C(t)) \leq T(v; \Omega \setminus \Gamma_C(t)) \quad \text{для всех } v \in K(\Omega \setminus \Gamma_C(t));$$

$$\Gamma_C(t) \supset \bigcup_{s < t} \Gamma_C(s), \quad T(u(t); \Omega \setminus \Gamma_C(t)) \leq T(u; \Omega \setminus \Gamma_C) \quad \text{для всех } \Gamma_C \supset \bigcup_{s < t} \Gamma_C(s),$$

$$\text{где } u \in K(\Omega \setminus \Gamma_C), \quad T(u; \Omega \setminus \Gamma_C) \leq T(v; \Omega \setminus \Gamma_C) \quad \text{для всех } v \in K(\Omega \setminus \Gamma_C).$$

Здесь функционал стоимости $u \mapsto T(u; \Omega \setminus \Gamma_C) : K(\Omega \setminus \Gamma_C) \mapsto \mathbb{R}$ выражает полную потенциальную энергию тела с трещиной в области $\Omega \setminus \Gamma_C$ над множеством допустимых перемещений $u \in K(\Omega \setminus \Gamma_C)$; геометрическое множество $\Sigma(\Omega)$ включает возможные пути развития трещины в Ω . Данная задача оптимизации описывает квазистатический процесс разрушения упругого тела с трещиной при монотонно возрастающей нагрузке согласно критерию Гриффитса. Вопрос об ее разрешимости в общем виде остается открытым.

Вводя в рассмотрение параметры формы для описания трещины Γ_C вдоль неизвестного пути $\Sigma \in \Sigma(\Omega)$, задача сводится к параметрической оптимизации, которая представляет собой обратную задачу для нахождения неизвестных параметров формы трещины. Доказаны теоремы о разрешимости однопараметрической задачи для описания процесса деламинации в композите, двухпараметрической задачи о росте прямолинейной трещины с изломом. При этом получены необходимые условия оптимальности первого порядка, которые характеризуют оптимальную трещину в процессе изменения как ее геометрии, так и топологии.

В качестве необходимых ингредиентов для анализа и решения задачи используются:

- кинематическое описание открытого многообразия коразмерности 1 (трещины) с помощью нахождения обобщенных характеристик, которые удовлетворяют задаче Коши для системы нелинейных ОДУ, или (линейному) скалярному транспортному уравнению с заданным полем скоростей;
- вариационные методы для задачи минимизации с односторонними ограничениями;
- методы анализа чувствительности по отношению к возмущению формы трещины;
- численные методы оптимизации с ограничением, основанные на свойстве обобщенной дифференцируемости (по Ньютону) оператора задачи и эквивалентных PDAS-методов. На их основе получены примеры численного решения эволюционной задачи о развитии трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00209) и Австрийского научного фонда FWF (код проекта P18267-N12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khudnev A. M., Kovtunen V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. 408 p.
2. *Ковтуненко В. А., Сухоруков И. В.* Оптимизационная постановка эволюционной задачи о развитии трещины при квазихрупком разрушении // Прикл. механика техн. физика. 2006. Т. 47, № 5. С. 107–118.
3. *Kovtunen V. A.* Interface cracks in composite orthotropic materials and their delamination via global shape optimization // Optim. Eng. 2006. V. 7. P. 173–199.
4. *Kovtunen V. A., Hintermüller M., Kunisch K.* Constrained optimization for interface cracks in composite materials subject to non-penetration conditions // J. Eng. Math. 2006. DOI 10.1007/s10665-006-9113-7.
5. *Kovtunen V. A., Hintermüller M., Kunisch K.* An optimization approach for the delamination of a composite material with non-penetration. In: Glowinski R. and Zolesio J.-P. (eds.) Free and Moving Boundaries: Analysis, Simulation and Control. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 252. Chapman & Hall/CRC, 2006.