

УДК 539.3

ПРИВЕДЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ОБОБЩЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

© Н. И. Мартынов

uikmar50@mail.ru

Институт космических исследований, Алматы, Казахстан

Среди разнообразия существующих методов решения двумерных задач статики неоднородных анизотропных сред, нет единого универсального подхода, каким является метод Мусхелишвили (и его модификации) для решения краевых задач изотропной однородной упругой среды.

Вместе с тем хорошо известно, что теория аналитического вектора есть теория решения общих эллиптических систем на плоскости. Она достаточно полно разработана, но не нашла широкого применения в теории упругости.

Работа [1] в определенной мере восполняет этот пробел. В ней основные краевые задачи статики неоднородной изотропной упругой среды приведены к краевым задачам (задачи Римана – Гильберта) обобщенного аналитического вектора. Она основана на простой идее. Закон Гука, записанный через функцию напряжений U и вектор перемещений $w = u_1 + iu_2$ ($z = x_1 + ix_2, s \equiv \bar{z} = x_1 - ix_2$) с дополнительным условием $U_{zs} = U_{sz}$, представляет собой эллиптическую систему первого порядка относительно $w, \bar{w}, U_z, U_s$, является интегралом уравнений совместности деформаций и уравнений равновесия. Поэтому решение краевых задач статики эквивалентно решению соответствующих краевых задач обобщенного аналитического вектора [1]. Такой подход позволяет обобщить метод Н. И. Мусхелишвили на неоднородные среды, ослабить условия на гладкость упругих параметров, записать общее решение и многое другое. Для решения конкретных задач применим метод граничных интегральных уравнений (НГИУ).

В настоящей работе обобщаются результаты [1] на анизотропные неоднородные упругие среды.

Закон Гука в комплексной форме для плоской деформации анизотропного неоднородного тела записывается в виде:

$$\begin{cases} \bar{w}_z = -bU_{zz} - dU_{ss} - cU_{sz} + F_1, w_s = -bU_{ss} - \bar{d}U_{zz} - \bar{c}U_{zs} + \bar{F}_1 \\ (w_z + \bar{w}_s) = \bar{c}U_{zz} + cU_{ss} + 4aU_{zs} - F_0, U_{zs} = U_{sz} \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c, d — комплексные параметры, линейно выражающиеся через приведенные упругие модули β_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) [2], а F_1, F_0 — вполне определенные линейные функции от массовых сил.

Система уравнений (1) приводится к каноническому (по И. Г. Петровскому) виду [3, 4]:

$$\vec{\chi}_s - Q\vec{\chi}_s = A\vec{\chi} + B\vec{\bar{\chi}} + \vec{F}_*, \|Q\| < 1, z \in D \quad (2)$$

а краевые условия основных краевых задач записываются как:

$$Re[\bar{G}\vec{\chi}(t)] = \vec{g}(t), t \in \Gamma, \det |G| \neq 0 \quad (3)$$

Здесь $\vec{\chi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ — неизвестный обобщенный аналитический вектор, а $Q, A, B, \vec{F}_*, G, g$ — известные матрицы. Для изотропного, трансверсально-изотропного тела матрица $Q = const$, поэтому фундаментальное решение (2) записывается в явном виде.

Чтобы не накладывать дополнительных условий на “гладкость” упругих параметров, систему (1) можно исследовать непосредственно, сведя ее к системе интегральных уравнений с помощью интегральных операторов по области [3, 4]. Это существенно расширяет класс обобщенных решений и позволяет унифицировать класс контактных задач из составных материалов.

Поскольку закон Гука выполняется на границе, то решения многих задач можно получить в замкнутом виде.

Изложенный метод непосредственно переносится на обобщенно-плоскую деформацию, криволинейную анизотропию. Он может быть модифицирован для решения задачи Соммильяно упруго неоднородного анизотропного тела [2], и сыграет, по-видимому, важную роль в построении моментной теории оболочек на базе теории обобщенно аналитического вектора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынов Н. И. Применение теории обобщенного аналитического вектора к решению статических задач неоднородной изотропной среды // Международная научная конференция “Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности”, посвященный 70-летию У. М. Султангазина. 2006. С. 62–65.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.
4. Боярский Б. В. Теория обобщенного аналитического вектора // Annales Polonici Mathematici. 1966. V. 17. P. 281–320.