Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 521–522

УДК 517.946

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© И. Э. Ниезов

iqboln@mail.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений моментной теории упругости в пространственной неограниченной области по ее значениям и значениям ее напряжений на части границы этой области, т. е. задача Коши.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ точки трехмерного вещественного евклидово пространство E^3, $D-$ неограниченная односвязная область в E^3, с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$ и плоскости $\partial D \backslash S:\ y_3 = 0$.

Пусть шести компонентный вектор-функция

$$U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), w_1(x), w_2(x), w_3(x)) = (u(x), w(x))$$

удовлетворяет в области D системы уравнений моментной теории упругости [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu+\alpha)\Delta u + (\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div}u + 2\alpha \mathrm{rot} w + \rho\theta^2 u = 0, \\ (\nu+\beta)\Delta w + (\varepsilon+\nu-\beta)\,\mathrm{grad\,div}w + 2\alpha \mathrm{rot} u - 4\alpha w + j\theta^2 w = 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

где коэффициенты $\lambda, \mu, \nu, \beta, \varepsilon, \alpha$ характеризующие среды, удовлетворяют условиям $\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu > 0,\ \alpha > 0,\ \varepsilon > 0,\ 3\varepsilon + 2\nu > 0,\ \beta > 0,\ j > 0,\ \rho > 0,\ \theta \in R^1$.

Для краткости изложения в дальнейшем систему (1) удобно записать в матричной форме

$$M(\partial_x)U(x) = 0. \tag{2}$$

Решение U системы(1) в области D назовем регулярным, если $U \in C^1(\overline{D}) \bigcap C^2(D)$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение U системы (1) в области D, исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S:

$$U(y) = f(y), \qquad T(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{3}$$

где $T(\partial_y, n(y))$ оператор напряжения, $n(y) = (n_1(y), n_2(y), n_3(y))$ — внешный единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y, $f = (f_1, \ldots, f_6)$, $g = (g_1, \ldots, g_6)$ заданные непрерывные вектор-функции на S.

Из определение матрицы Карлемана [2] вытекет, что всякое регулярное решение $U(x)$ системы (1) в ограниченной области D определяется формулой

$$U(x) = \int\limits_{\partial D} (\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - \{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}^* U(y))\, ds_y, \ \ x \in D, \tag{4}$$

где $\Pi(y, x, \sigma)$ — матрица Карлемана.

В данной работе для неограниченных областях специального вида строится матрица Карлемана и на ее основе доказывается справедливость формулы (4) для данной неограниченной области и строится регуляризованное решение задачи (1), (3).

Пусть область $D \in R^3$ лежит внутри полосы $0 < y_3 < h$, $h = \dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$, граница которой состоит из гиперплоскости $y_3 = 0$ и некоторой гладкой поверхности S, заданной уравнением $y_3 = f(y')$, $y' \in R^2$, причем $0 < f(y') \le h$ и $|\mathrm{grad}\ \ f(y')| \le c < \infty$.

Введем обозначение

$$U_\sigma(x) = \int\limits_S [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}^*]\, ds_y, \ \ x \in D.$$

Теорема. *Пусть* $U(x)$ *регулярное решение* (1) *и удовлетворяет граничному условию*

$$|U(y)| + |T(\partial y, n)U(y)| \le M, \quad y \in \partial D.$$

Тогда

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC(\rho,x)\sigma^2 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D,$$

где

$$C(\rho,x) = C(\rho) \int\limits_{y_3=0} \frac{ds_y}{r^4}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В. и др.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.
2. *Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И.* Задача Коши для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве // Узбекский мат. журн. 1996. № 1. С. 22–29.