

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ УПРУГОСТИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ УПРУГИХ СРЕД

© Н. И. Остросаблин

abd@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Дана новая трактовка компонент тензора четвертого ранга модулей упругости как инвариантных постоянных, не зависящих от ортогонального преобразования системы координат. Показано, что определяющие соотношения для упругих сред представляются в инвариантной форме.

В прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 обобщенный закон Гука записывается в виде (по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование)

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$ — компоненты тензора четвертого ранга модулей упругости; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ — компоненты тензора деформаций. При ортогональном преобразовании системы координат

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j, \quad \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \quad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq} \quad (2)$$

(δ_{pq} — единичная матрица) напряжения (деформации) и A_{ijkl} преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{\sigma}_{pq}, \quad \hat{\sigma}_{pq} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\sigma_{ij}; \\ A_{ijkl} &= \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}\hat{A}_{pqrs}, \quad \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}A_{ijkl}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу свойств симметрии тензор A_{ijkl} имеет только 21 независимую компоненту. Существуют многочисленные работы, в которых пытаются найти неприводимый базис полиномиальных инвариантов тензора A_{ijkl} при ортогональных преобразованиях (2), (3). Но эта задача до настоящего времени еще полностью не решена.

В данной работе предлагаются инвариантные постоянные упругости, остающиеся неизменными при ортогональных преобразованиях системы координат (2). Инвариантные постоянные упругости для кристаллов рассматривались в работе [1]. Закон Гука (1) записывается в инвариантной форме. В более общем случае определяющие соотношения сплошной среды, т. е. функциональная связь напряжений и деформаций, также оказываются инвариантными, если в пространстве симметричных тензоров второго ранга выбран ортогональный тензорный базис.

Пусть n_{ip} — произвольная ортогональная тройка единичных векторов: $n_{ip}n_{iq} = \delta_{pq}$. Тогда величины

$$\tilde{A}_{pqrs} = A_{ijkl}n_{ip}n_{jq}n_{kr}n_{ls} = A_{ijkl}t_{ijklpqrs}, \quad (4)$$

$$t_{ijklpqrs} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(n_{ip}n_{jq} + n_{iq}n_{jp}) \frac{1}{2}(n_{kr}n_{ls} + n_{ks}n_{lr}) + \frac{1}{2}(n_{ir}n_{js} + n_{is}n_{jr}) \frac{1}{2}(n_{kp}n_{lq} + n_{kq}n_{lp}) \right]$$

остаются инвариантными при ортогональных преобразованиях системы координат (2), (3). Тензоры $t_{ijklpqrs}$ (четыре последних индекса обозначают номер тензора, всего — 21 тензор) образуют ортогональный базис [2] в пространстве тензоров четвертого ранга вида (1). Величины $\tilde{A}_{pqrs}$ являются проекциями тензора A_{ijkl} на базисные тензоры $t_{ijklpqrs}$. За счет выбора

трех параметров, определяющих положение векторов n_{ip} , $p = 1, 2, 3$ число независимых инвариантных постоянных упругости $\tilde{A}_{pqrs}$ можно уменьшить до 18, например, всегда можно считать, что выполняются три условия Коши $\tilde{A}_{2311} = \tilde{A}_{1231}$, $\tilde{A}_{1322} = \tilde{A}_{2132}$, $\tilde{A}_{1233} = \tilde{A}_{3123}$. Из (4) следует, что

$$A_{ijkl} = t_{ijklpqrs} \tilde{A}_{pqrs} = n_{ip} n_{jq} n_{kr} n_{ls} \tilde{A}_{pqrs}. \quad (5)$$

Теперь с учетом (5) получаем из (1) инвариантную запись закона Гука

$$\tilde{\sigma}_{pq} = \tilde{A}_{pqrs} \tilde{\varepsilon}_{rs}, \quad \tilde{\sigma}_{pq} = \sigma_{ij} n_{ip} n_{jq} = \sigma_{ij} t_{ijpq}, \quad (6)$$

$$t_{ijpq} = \frac{1}{2}(n_{ip} n_{jq} + n_{iq} n_{jp}), \quad \tilde{\varepsilon}_{rs} = \varepsilon_{kl} t_{klrs}.$$

Тензоры $t_{ijpq} = t_{ijqp}$ (два последних индекса обозначают номер тензора) образуют ортогональный базис в пространстве симметричных тензоров второго ранга.

В общем случае упругой среды функциональная связь напряжений и деформаций также записывается в инвариантной форме [3]

$$\tilde{\sigma}_{pq} = t_{ijpq} f_{ij}(t_{klrs} \tilde{\varepsilon}_{rs}) = \tilde{f}_{pq}(\tilde{\varepsilon}_{rs}), \quad (7)$$

где $t_{ijpq} = t_{ijqp}$ — ортонормированный тензорный базис, зависящий от 15 свободных параметров. Если в качестве тензорного базиса выбраны ортогональные собственные состояния t_{ijpq} , то закон Гука (6) принимает вид

$$\tilde{\sigma}_{pq} = \lambda_{pqrs} \tilde{\varepsilon}_{rs}, \quad (pq) = (rs),$$

где λ_{pqrs} , $(pq) = (rs)$ — собственные модули упругости [4]. Базис t_{ijpq} может быть выбран таким образом, чтобы определяющие соотношения (7) имели наиболее простой вид [3]

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \tilde{f}_{11}(\tilde{\varepsilon}_{11}), & \tilde{\sigma}_{22} &= \tilde{f}_{22}(\tilde{\varepsilon}_{22}), & \tilde{\sigma}_{33} &= \tilde{f}_{33}(\tilde{\varepsilon}_{33}), \\ \tilde{\sigma}_{23} &= \tilde{f}_{23}(\tilde{\varepsilon}_{23}), & \tilde{\sigma}_{13} &= \tilde{f}_{13}(\tilde{\varepsilon}_{13}), & \tilde{\sigma}_{12} &= \tilde{f}_{12}(\tilde{\varepsilon}_{12}), \end{aligned}$$

при этом каждая функция зависит от одной переменной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00728) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-6481.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Srinivasan T. P., Nigam S. D. Invariant elastic constants for crystals // J. Math. Mech. 1969. V. 19, N 5. P. 411–420.
2. Остросаблин Н. И. Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
3. Остросаблин Н. И. О функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: Тез. докл. Всерос. конф. Новосибирск, 9–13 октября 2006 г. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. С. 96.
4. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1986. № 4. С. 127–135.