Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 525–526

УДК 539.375:534.1

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСЛОВИЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВИБРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА СИСТЕМОЙ ДЕФЕКТОВ

© О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова

donna@kubsu.ru

Кубанский государственный университет, Краснодар

Гармонические колебания многослойной полуограниченной среды, вызванные вибрацией берегов трещин, описываются краевой задачей для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которая сводится к системе интегральных уравнений (ИУ) I рода [1–3]. Большая размерность этой системы в случае множественных дефектов и ее зависимость от большого числа параметров требует создания специальных методов исследования подобного рода задач [1–3].

Матрица-символ ядра указанной системы $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ является блочной, размерность ее элементов — матриц $\mathbf{K}_{ij}$ определяется физико-механическими свойствами среды. Для упругих материалов это матрицы размерности 3×3, а в общем случае для термоэлектроупругих сред — 5×5. Размерность системы ИУ равна $5\times M$, M — общее количество трещин в среде. Элементы матриц $\mathbf{K}_{ij}(\alpha,\beta,\omega)$ кроме параметров преобразования Фурье α,β и частоты гармонических колебаний ω зависят от геометрических и физико-механических параметров слоев, а также от параметров, характеризующих положение неоднородностей в среде. Кроме того, параметрами задачи являются размеры и относительное расположение областей, занятых трещинами.

Для представления $\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ в форме, допускающей простую интерпретацию результатов, введены специальные матрицы, характеризующие положение дефектов в среде. Не нарушая общности, предполагается, что дефекты расположены в плоскостях раздела физико-механических свойств слоев.

Для трещины, расположенной в плоскости $z=-2\sum\limits_{k=1}^{p}h_k$, вводится матрица

$$\mathbf{S}_{Np}=\mathbf{K}_p^-(h_1,h_2,\ldots,h_p)-\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1},h_{p+2},\ldots,h_N).$$

Здесь $\mathbf{K}_p^-$ — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-p}$ — матрица Грина пакета $(N-p)$ слоев на жестком основании, h_i — полутолщина i-го слоя.

В этих обозначениях матрица-символ системы ИУ построена в форме [3]:

$$\mathbf{K}_{ij}=\begin{cases}\mathbf{S}_{Ni}^{-1}, & i=j,\\ \mathbf{R}_{ij}^-\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i<j,\\ \mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i>j,\end{cases}$$

где $\mathbf{K}=\|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$, матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}_{km}^-$, а также рекуррентная процедура вычисления матриц $\mathbf{K}_m^-(h_1,\ldots,h_m)$, $\mathbf{K}_{N-m}(h_{m+1},\ldots,h_N)$, $\mathbf{\Phi}_m(h_1,\ldots,h_m)$, $\mathbf{F}_{N-m}(h_{m+1},\ldots,h_N)$ приведены в [4]. Вспомогательные матрицы $\mathbf{B}_\pm$ даются в [1,2].

Полученные соотношения позволяют моделировать любое сочетание трещин в среде, обладающей сложными физико-механическими свойствами. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Определитель матрицы-символа ядра системы интегральных уравнений при наличии трещин только между слоями с номером p и $p+1$ равен*

$$\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)=\det\mathbf{S}_{Np}^{-1}.$$

Теорема 2. *Определитель матрицы-символа ядра системы интегральных уравнений для трещин, расположенных на каждой границе раздела пакета N слоев, равен*

$$\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \prod_{i=1}^{N-1} \det \mathbf{S}_{(N-i+1)1}^{-1}.$$

Теорема 3. *Определитель матрицы-символа ядра системы интегральных уравнений при наличии трещин, расположенных на границах между p и $p+1$, i и $i+1$ слоями $(p < i)$ равен*

$$\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \det \mathbf{S}_{Np}^{-1} \det \mathbf{S}_{(N-p)(i-p)}^{-1},$$

$\mathbf{S}_{Np}$ *— матрица, описывающая положение первой (верхней) трещины в N-слойной среде, а $\mathbf{S}_{(N-p)(i-p)}$ — матрица, описывающая положение второй (нижней) трещины в пакете $(N-p)$ слоев*

$$\mathbf{S}_{(N-p)(i-p)}(h_{p+1}) = \mathbf{K}_{(i-p)}^{-}(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_i) - \mathbf{K}_{N-i}(h_{i+1}, h_{i+2}, \ldots, h_N).$$

Используя приведенные теоремы, можно построить определитель системы ИУ при произвольном количестве, сочетании и взаимном расположении трещин в слоистой среде. Отметим, что если трещина находится внутри какого-либо слоя, следует ввести условную границу раздела и параметры прилегающих к ней слоев положить равными. Для однородной среды, содержащей многоуровневые трещины, равными принимаются физико-механические параметры всех слоев. Дальнейшее преобразование выражений для определителей систем ИУ проводится при наличии симметрии свойств материалов слоев. Метод построения $\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ в виде отношения целых функций для изотропных и трансверсально изотропных упругих сред и примеры его использования приведены в [4].

Полученные выражения для $\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ дают четкое представление о структуре его особых множеств (нулей и полюсов), что позволяет путем целенаправленного подбора геометрических и физико-механических параметров проектировать системы с заданными спектральными характеристиками.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00811, 06-01-96600, 06-01-96638, 06-01-96639, 06-01-96632, 06-08-00671, 06-01-08017), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68, вып. 3. С. 499–506.
3. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Динамические задачи для сред с нарушением сплошности // Прикладная механика. 2004. №2. С. 3–10.
4. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 44–53.