

КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА И ТЕРМОДИНАМИКА ПЛАСТИЧНОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ

© Р. А. Шарипов

r-sharipov@mail.ru

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Точное описание больших пластических деформаций возможно лишь в рамках нелинейной теории. В такой теории для аморфных материалов в работе [1] было предложено мультипликативное разложение тензора деформаций Коши – Грина на упругую и пластическую части:

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 \check{G}_i^k \hat{G}_{kq} \check{G}_j^q. \quad (1)$$

Компоненты пластического тензора деформаций $\check{\mathbf{G}}$ в (1) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \check{G}_i^k}{\partial t} + \sum_{r=1}^3 v^r \nabla_r \check{G}_i^k = \sum_{r=1}^3 \left(\check{G}_i^r \nabla_r v^k - \nabla_i v^r \check{G}_r^k \right) - \sum_{r=1}^3 \theta_r^k \check{G}_i^r. \quad (2)$$

Компоненты упругого тензора деформаций $\hat{\mathbf{G}}$, который симметричен, удовлетворяют аналогичному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \hat{G}_{kq}}{\partial t} + \sum_{r=1}^3 v^r \nabla_r \hat{G}_{kq} = - \sum_{r=1}^3 \nabla_k v^r \hat{G}_{rq} - \sum_{r=1}^3 \hat{G}_{kr} \nabla_q v^r + \sum_{r=1}^3 \theta_k^r \hat{G}_{rq} + \sum_{r=1}^3 \hat{G}_{kr} \theta_q^r. \quad (3)$$

Здесь v^r и v^k — компоненты вектора скорости среды $\mathbf{v}$. Через θ_k^r и θ_q^r в (2) и (3) обозначены компоненты особого тензора $\boldsymbol{\theta}$. Он называется тензором скорости пластической релаксации. Разложение (1) и уравнения (2) и (3) описывают исключительно кинематику среды. В работе [2] было показано, что они остаются справедливыми и для кристаллических сред. В кристаллах тензор $\boldsymbol{\theta}$ выражается через тензоры $\mathbf{R}$ и $\mathbf{J}$, которые описывают плотность и плотность тока для суммарного вектора Бюргерса движущихся дислокаций (см. [3]). В работе [4] отслеживается аналогия между нелинейной теорией дислокаций в кристаллах и электродинамикой.

Симметричный и положительно определённый тензор упругих деформаций $\hat{\mathbf{G}}$ с компонентами $\hat{G}_{kq}$ в (1) может пониматься как метрика. В работе [5] показано, что это плоская метрика относительно несимметричной метрической связности, кручение которой задается тензором $\mathbf{R}$. Это свойство метрики сохраняется в динамике.

Термодинамика пластических деформаций описывается при помощи удельной свободной энергии среды f (т. е. отнесённой к единице массы). Она берётся в виде функции:

$$f = f(t, p, T, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{G}}, \rho) \quad \text{для аморфной среды,} \quad (4)$$

$$f = f(t, p, T, \mathbf{g}, \hat{\mathbf{G}}, \mathbf{R}, \rho) \quad \text{для кристаллической среды.} \quad (5)$$

Здесь t — время, p — точка среды. Далее ρ — плотность и T — температура в точке p в момент времени t , $\mathbf{g}$ — метрический тензор стандартной евклидовой метрики. Отметим, что

функция $f = f(T, \hat{\mathbf{G}})$, использованная в [1], слишком ограничительна. Для различных специальных типов аморфных сред (пористых, зернистых, волокнистых и т. д.) список аргументов функции (4) может быть расширен.

В обоих случаях (4) и (5) функция f — это расширенное скалярное поле в смысле работы [7]. Она удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению первого порядка, которое выводится из соображений изотропности пространства (не среды). Любой уровень анизотропности самой среды может быть описан функциями (4) и (5).

Для пластических течений, как и для многих других, динамика среды описывается стандартными средствами через уравнения баланса (см. [1] и [6]), которые включают баланс **массы**, баланс **импульса** и баланс **энергии**. Весь фокус заключён в параметрах, которые входят в эти уравнения. Они делятся на две группы: **термодинамические** параметры и **кинетические** параметры.

Все термодинамические параметры выражаются через частные производные функции f . Кинетические параметры вводятся независимым образом. Но, тем не менее, они имеют тот же список аргументов, что и функция f .

Уравнение баланса энтропии выводится из перечисленных выше уравнений баланса массы, импульса и энергии при учёте кинематических уравнений (2) и (3). Для кристаллических сред оно имеет вид

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \nabla_k \left(\rho s v^k + \dots + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P^{kij} \theta_{ij} \right) = \dots + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\mathfrak{S}^{ij} \theta_{ij}}{T}. \quad (6)$$

Точками обозначены слагаемые, которые отвечают за сопутствующие пластическому течению процессы — это вязкость, теплопроводность, диффузия и т. д. Сама пластичность в (6) описывается двумя членами, содержащими θ_{ij} , где θ_{ij} — ковариантные компоненты тензора скорости пластической релаксации $\boldsymbol{\theta}$. Они вычисляются по формуле

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^3 g_{ik} \theta_j^k.$$

Отметим, что величины θ_{ij} — это кинетические параметры, а P^{kij} и $\mathfrak{S}^{ij}$ — это термодинамические параметры. Явные формулы для последних выведены в работе [6].

Несмотря на нелинейность теории, различные физические явления дают аддитивный вклад в обе части уравнения (6). Применительно к пластичности данный факт означает, что пластичность — это абсолютно отдельное физическое явление, отличное от вязкости. В частности, это значит, что всякие попытки описать пластический материал как очень вязкую жидкость противоречат природе вещей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lyuksyutov S., Sharipov R.* Note on kinematics, dynamics, and thermodynamics of plastic glassy media // E-print cond-mat/0304190 in <http://arXiv.org>, 2003, С. 1–19.
2. *Comer J., Sharipov R.* A note on the kinematics of dislocations in crystals // E-print math-ph/0410006 in <http://arXiv.org>, 2004, С. 1–15.
3. *Sharipov R.* Burgers space versus real space in the nonlinear theory of dislocations // E-print cond-mat/0411148 in <http://arXiv.org>, 2004, С. 1–10.
4. *Sharipov R.* Gauge or not gauge? // E-print cond-mat/0410552 in <http://arXiv.org>, 2004, С. 1–12.
5. *Comer J., Sharipov R.* On the geometry of a dislocated medium // E-print math-ph/0502007 in <http://arXiv.org>, 2005, С. 1–17.
6. *Sharipov R.* A note on the dynamics and thermodynamics of dislocated crystals // E-print cond-mat/0504180 in <http://arXiv.org>, 2005, С. 1–18.
7. *Sharipov R.* Tensor functions of tensors and the concept of extended tensor fields // E-print math.DG/0503332 in <http://arXiv.org>, 2005, С. 1–43.