Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 1–2

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБАХ ТОНКИХ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

© А. Н. Тюреходжаев, Б. Ж. Кырыкбаев, В. Б. Рыстыгулова, Г. А. Карибаева

tyurekhodja@ntu.kz

Казахский национальный технический университет имени К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Получено аналитическое решение задач об изгибе составных и несоставных осесимметричных и прямоугольных пластин, цилиндрических оболочек с переменными механическими характеристиками, работающих в неоднородном температурном поле, методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [1].

Неоднородные пластины и оболочки находят широкие применения в проблемах разработки новых констукций паровых газовых турбин, реактивных, ракетных двигателей, ядерных реакторов, обшивках летательных аппаратов, цилиндрических резервуаров, заполненных полностью или частично жидкостью, например, нефтью, бензином или сыпучим материалом.

Исследована энергетическим методом задача о квазистатической устойчивости круглой неодородной пластины с отверстием под воздействием поперечной нагрузки и усилий, действующих по внутреннему контуру, в неоднородном температурном поле.

Рассмотрена круглая гибкая пластина, основная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &D\frac{d}{dr}\left[\nabla^2\Phi(r)\right] = \Psi + \frac{h}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr}\left[\frac{d\,w(r)}{dr} + \frac{d\,w_{Hr}(r)}{dr}\right], \\ &\frac{d}{dr}\left[\nabla^2\Phi(r)\right] = -\frac{E}{r}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dw(r)}{d\,r}\right)^2 + \frac{d\,w(r)}{dr}\cdot\frac{d\,w_{Hr}(r)}{dr}\right], \end{aligned} \tag{1}$$

где $\nabla^2 = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}\right)$ — цилиндрический оператор,

$\Psi(r) = -\dfrac{1}{r}\displaystyle\int\limits_0^r q(r)\left[H(r-r_c) - H(r-r_d)\right] r\,dr$ — функция нагрузки, распределенная по круговой полосе с радиусами r_c и r_d, $H(z)$ — единичная функция Хевисайда, Φ — функция напряжения, введенная выражения $\sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Phi}{dr}$, $\sigma_\theta = \dfrac{d^2\Phi}{d\,r^2}$, w — прогиб, w_{Hr} — начальный прогиб оболочки, $D(z) = \dfrac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}$, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент температурного расширения, $h(z) = h_0 + hz$ — переменная толщина оболочки, R — радиус срединной поверхности, $f(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2$ — радиальный перепад температур между наружной и внутренними поверхностями, $F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z$ — средняя по толщине оболочки температура; $p^* = p - \nu S_z/h(z)$, S_z — продольная осевая сила, p — радиальная нагрузка, приложенная внутренней поверхности оболочки, $M_r(r)$ — радиальный изгибающий момент.

Применяя метод частичной дискретизации дифференциальных уравнений [1] к правой части второго уравнения системы (1), то же – к выражению $\dfrac{dw}{dr}$ первого уравнения, получим общее решение для $\frac{d\Phi}{dr}$ и $w(r)$. Для нахождения произвольных постоянных воспользуемся граничными условиями

$$\sigma_r(r_a) = \frac{1}{r_a}\frac{d\,\Phi(r_a)}{d\,r} = 0, \qquad \frac{d\,w(r_b)}{dr} = w(r_b) = 0 \tag{2}$$

и двумя другими условиями, связанными с двумя особенностями, содержащимися в решениях задачи.

Найдено решение задачи об изгибе цилиндрической оболочки:

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\left[D(z)\frac{d^2u(z)}{d\,z^2}\right] + \frac{E}{R^2}h(z)u(z) = p^* - \alpha\frac{1+\nu}{h(z)}\frac{d^2f(z)}{d\,z^2} + \alpha\frac{Eh(z)F(z)}{RD(z)}, \tag{3}$$

$$u(0) = \frac{du(0)}{dz} = 0, \qquad M_A(l) = M_0, \qquad Q(l) = Q, \tag{4}$$

где $u(z)$ — прогиб оболочки, $D(z) = \dfrac{Eh^3(z)}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

Пусть на жестко заделанном и свободном торцах оболочки выполняются следующие граничные условия

$$u(0) = \frac{d\,u(0)}{dz} = 0, \qquad M_z(l) = -D(l)\frac{d^2u(l)}{dz^2} = 0, \qquad Q(l) = -\frac{d}{dz}\left[D(z)\frac{d^2u(z)}{dz^2}\right] = 0. \tag{5}$$

Построены кривые изгиба для заданных значений параметров задачи.

Получены решения задачи об изгибных волнах прямоугольной неоднородной тонкой пластины, описывающиеся дифференциальным уравнением [2]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{6}$$

где

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_y = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Полагая, что прогиб $w(x,t)$ имеет гармоническую зависимость от времени, (5) приведем к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(a_1\frac{d^2w}{dx^2} - a_2 w\right) - b\frac{dw}{dx}\right] - a_2\frac{d^2w}{dx^2} - cw = 0, \tag{7}$$

где $a_1 = D$, $a_2 = \nu n^2$, $b = 2n^2 D(1-\nu)$, $c = \rho h w^2 - Dn^4$; w и n — параметры, входящие в гармоническую функцию. Получено решение дифференциального уравнения (6) и построены интегральные задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
2. *Тюреходжаев А.Н., Калжанова Г.К.* Сложный изгиб гибкой кольцевой пластины в осесимметричном температурном поле // Доклады НАН РК. 2005. № 2. С. 86–92.