Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 509–510

УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

© Г. К. Закирьянова

zakir@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Исследование динамики сплошных сред в областях со сложной геометрией при разном типе граничных условий приводит, как правило, к решению начально-краевых задач для гиперболических систем. При решении таких задач появляется необходимость в использовании аппарата теории обобщенных функций, поскольку гиперболические уравнения имеют характеристические поверхности, на которых решения могут иметь скачки производных и описываются обобщенными функциями как регулярного, так и сингулярного типов с особенностями на волновых фронтах.

В работе рассматривается решение начально-краевых задач для строго гиперболических систем M уравнений с производными второго порядка в пространстве R^{N+1} (здесь $N, M =$2,3):

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j(x,t) + G_i(x,t) = 0,\ (x,t) \in R^{N+1},$$

$$L_{ij}\left(\partial_x, \partial_t\right) = C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l - \delta_{ij}\partial_t^2, \quad i,j = \overline{1,M}, \quad m,l = \overline{1,N}, \tag{1}$$

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij}, \quad C_{ij}^{ml}n_m n_l v^i v^j > 0 \quad \forall n \neq 0, \quad v \neq 0,$$

где $x \in S^-$, S^- — ограниченное компактное множество в R^N, S — граница, S^- принадлежит классу поверхностей Ляпунова с внешней нормалью n, $\|n\| = 1$, $(x,t) \in D^-$, $D^- = S^- \times [0,\infty)$, $D_t^- = S^- \times [0,t)$, $D = S \times [0,\infty)$, $D_t = S \times [0,t)$.

По одноименным индексам проводится суммирование в указанных пределах.

В пространстве обобщенных функций построены решения начально-краевой задачи при следующих граничных условиях:

(начальные данные) $u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- + S, \quad u_{i,t}(x,0) = u_i^1(x), \quad x \in S^-;$

(краевые условия) $\sigma_i^l(x,t)n_l(x) = g_i(x,t), \quad x \in S, \quad t > 0, \quad \sigma_i^l = C_{ij}^{ml}u_{j,m}$
и условиях на волновых фронтах F_t:

$$\left[u_i(x,t)\right]_{F_t} = 0, \quad \left[\sigma_i^l\nu_l + cu_{i,t}\right]_{F_t} = 0, \quad \sigma_i^l = C_{ij}^{ml}u_{j,m},$$

которые являются характеристическими поверхностями для (1), $\nu(x,t)$ — нормаль к F_t.

Представлены условия на скачки производных решений на характеристических поверхностях (волновых фронтах) и рассмотрены вопросы единственности решений краевых задач, в т. ч. в классе ударных волн.

Используемый в работе метод обобщенных функций эффективен при решении краевых задач для систем уравнений с частными производными, особенно при решении систем гиперболических уравнений, если удается построить матрицу Грина системы. Здесь на основе этого метода, с использованием фундаментальных решений [1] системы (1), получено обобщенное решение задачи $u(x,t)$.

Теорема. *Если u — классическое решение краевой задачи, то обобщенное решение $\widehat{u}(x,t)$ представимо в виде сверток*

$$\widehat{u}_i(x,t) = U_i^k(x,t) * \widehat{G}_k(x,t) + U_i^k(x,t) \underset{x}{*} u_k^1(x)H_S^-(x)$$

$$+U_{i,t}^{k}(x,t)\underset{x}{*}u_k^0(x)H_S^-(x)+U_i^k(x,t)*g_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$$

$$-C_{kj}^{ml}V_{i,l}^{k}(x,t)*u_{j,t}(x,t)n_m(x)\delta_S(x)H(t)$$

$$-C_{kj}^{ml}V_{i,l}^{k}(x,t)\underset{x}{*}u_j^0(x)n_m(x)\delta_S(x),$$

здесь $\widehat{u}(x,t)=H(t)H_S^-(x)u(x,t)$, $\widehat{G}_k(x,t)=H(t)H_S^-(x)G_k(x,t)$, $H(t)$ *— функция Хевисайда,* $H_S^-(x)$ *— характеристическая функция множества* S^- , $g_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$ *— сингулярная обобщенная функция — простой слой на цилиндре* D *, символ "* $*$ *" означает полную свертку по* (x,t) *, символ "* x *" под звездочкой соответствует свертке только по* x *.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеева Л. А., Закирьянова Г. К.* Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 488–494.