

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МИЗЕСА

© О. Н. Жданов

onzhdanov@mail.ru

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. акад. М. Ф. Решетнева, Красноярск

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих плоское напряженное состояние пластической среды Мизеса:

$$\begin{cases} \sigma_x - 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta) = 0, \\ \sigma_y - 2k(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

где σ — гидростатическое давление, θ — угол между осью OX и первым главным направлением тензора напряжений, k — постоянная пластичности, индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Ранее применение законов сохранения были решены задачи Коши и задача Римана для системы (1), см. [1, с. 165–183]. Смешанную задачу долгое время не удавалось решить. Наш подход заключается в применении к задаче не одного закона сохранения, как это было во многих работах, а одновременно нескольких таких законов.

Приведем точную формулировку задачи. На одной из характеристик заданы функции $\sigma = \sigma_1(x, y)$, $\theta = \theta_1(x, y)$, а на пересекающей её нехарактеристической кривой $\{x = \alpha(t), y = \beta(t)\}$ задана функция $\theta_2(x, y)$. Обозначим точку их пересечения M . Задачей является нахождение точек пересечения характеристик и значений функций σ, θ в них.

2. Метод решения. Мы сведем смешанную задачу к задаче Коши. Выберем на характеристике, несущей начальные данные, точку P и найдем соответствующую ей точку N на заданной нехарактеристической кривой, т. е. проведем из P характеристику другого семейства до пересечения с кривой.

Запишем законы сохранения для системы (1) в виде:

$$\partial_x(-A^i) + \partial_y(B^i) = 0, \quad (2)$$

$i = 1, 2$, где A^i, B^i — функции только от σ, θ .

Равенства (2) должны выполняться только на решениях системы (1). Введем новые переменные по формулам: $\sigma = k(\eta + \xi)$, $2\theta = \eta - \xi$. После упрощений имеем систему относительно A^i, B^i :

$$A_\xi^i + B_\xi^i \cdot \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad A_\eta^i - B_\eta^i \cdot \operatorname{tg} \theta = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Закон сохранения (2) равносильен равенству нулю интеграла по замкнутому контуру. Проинтегрировав по частям с учетом уравнений характеристик, положим:

$$\partial_\eta((A^i \cdot \operatorname{tg} \theta + B^i)|_{\xi=\xi_1}) = 0, \quad \partial_\xi((-A^i \cdot \operatorname{ctg} \theta + B^i)|_{\eta=\eta_i}) = 0,$$

где $\{\xi = \xi_1\}$ — уравнение характеристики одного семейства, а $\{\eta = \eta_i\}$ — другого. Каждая система уравнений эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению, которое можно решить методом последовательных приближений.

В результате получаем систему уравнений относительно координат точек:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \cdot x_Q^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_{1k} \cdot x_M^k + a_{11} \cdot x_N + a_{12} \cdot x_P = I_1(\xi), \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \cdot x_N^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} \cdot x_P^k + a_{21} \cdot x_Q + a_{22} \cdot x_P = I_2(\xi), \end{cases} \quad (4)$$

где c_{ij} , a_{ij} , b_{ij} — постоянные, x_Q — координата еще одной точки пересечения характеристик, $I_i(\xi) = \int_{PM} A^i(\xi) dy + B^i(\xi) dx$ — интеграл, зависящий от параметра.

Из (4) находится x_N как функция ξ : $x_N = f(\xi)$.

Аналогично находится $y_N = g(\xi)$. Их (4) видно, что одного закона сохранения было недостаточно. Теперь имеем систему:

$$x_N = f(\xi), \quad y_N = g(\xi), \quad x = \alpha(t), \quad y = \beta(t). \quad (5)$$

Решение системы (5) можно найти с любой наперед заданной точностью.

3. Результат. Выбрав точки P_j на характеристике, выходящей из M , находим соответствующие им точки N_j . Построенная последовательность точек $\{N_j\}$ на кривой сводит смешанную задачу к задаче Коши. Именно, из точек N_j выпускаем характеристики, ищем точки их пересечения и значения функций σ , θ в них, что является решенной задачей. (В формулы, полученные в [1], входит интеграл по кривой MN . Мы его вычисляем приближенно, взяв достаточное количество точек N_j). Таким образом, получаем решение в криволинейном треугольнике, ограниченном кривой и характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирыков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.