Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 414–415

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
THEORY OF FUNCTIONS AND COMPLEX ANALYSIS

УДК 517.956.22

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

© Г. М. Айрапетян

hhairapet@seua.am

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

1. Пусть B_1 — класс функций u гармонических в верхней полуплоскости $G^+ = \{z; Imz > 0\}$, удовлетворяющих для любого $y_0 > 0$ неравенству $|u(z)| < Aexp|z|^\gamma,\ \gamma < 1,\ Imz > y_0 > 0,$ где A — постоянная, зависящая от y_0. Рассматривается задача Дирихле в полуплоскости в следующей постановке: определить действительную гармоническую функцию $u(x,y) \in B_1$, так что имело место граничное условие

$$\lim_{y \to +0} \|u\,(x,y) - f\,(x)\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{1}$$

где $\rho(x) = \rho_1(x)(1+|x|)^{-\alpha}$, причем ρ_1 — медленно меняющаяся функция на бесконечности справа и слева ([1]), α — действительное число, $\|\cdot\|$ — норма пространства $L^p(\rho)$, $f \in L^p(\rho)$. При $\alpha \le 1$ задача (1) при $p = 1$ исследована в [2] и установлено, что она имеет решение для любой функции $f \in L^1(\rho)$.

2. Скажем, что $\rho \in R_0$, если α нецелое число, либо целое число и выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x)}{1+|x|} dx < \infty.$$

Положим $n_0 = \left[(\alpha - 1)p^{-1}\right] + 1.$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

a). Если $n_0 > 0,\ \rho \in R_0$, то общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде

$$u_0(z) = Re \sum_{k=0}^{n_0-1} i a_k z^k, \tag{2}$$

где a_k — произвольные действительные числа.

b). Если $n_0 > 0,\ \rho \notin R_0$, то общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде (2) при условии, что $a_{n_0-1} = 0$.

c). Если $n_0 \le 0$, то $u_0(z) \equiv 0$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

a). Пусть $n_0 \ge 0$, тогда задача (1) разрешима для любой функции $f \in L^p(\rho)$, общее решение можно представить в виде $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$, где $u_0(z)$ общее решение однородной задачи, а

$$u_1(z) = Re\left(\frac{(z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)}\right) + Re\left(\frac{(z-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-z)}\right). \tag{3}$$

b). Пусть $n_0 < 0$ и $\rho \in R_0$, тогда задача (1) имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -n_0 - 1. \tag{4}$$

При выполнении условий (4) задача (1) имеет единственное решение и его можно представить в виде $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$, где

$$u_0(z) = ReC_0(z+i)^{n_0}, \quad C_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0+1}},$$

а $u_1(z)$ — функция (3).

c). Пусть $n_0 < 0$ и $\rho \notin R_0$, тогда задача (1) имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (4), где $k = 0, 1, 2, \ldots, -n_0 - 1$. При выполнении этих условий задача имеет единственное решение и его можно представить в виде (3).

3. Применяя теорему 2, можно получить теорему единственности в классе ограниченных гармонических функций в полуплоскости.

Теорема 3. *Пусть $u(z)$ ограниченная гармоническая функция в верхней полуплоскости и $\sup\left(|u(x,y)| \exp\phi(x)\right) < \infty$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, \infty)$, где $\phi(x)$ выпуклая относительно $\ln x$ положительная четная функция. Тогда, если $\phi(x)(1+|x|^2)^{-2} \notin L^1(-\infty, \infty)$, то $u(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $u(z)$ имеет граничные значения почти всюду на действительной оси при $y \to 0$. Обозначив граничную функцию через $f(x)$, будем иметь $f \in L^1(\rho)$ и

$$\lim_{y \to +0} \|u(x,y) - f(x)\|_{L^p(\rho)} = 0,$$

где $\rho(x) = |x+i|^{-2}\phi(x)$. Применяя теорему 2 заключаем, что функция f удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k dt = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Пусть, теперь $F(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$. Из условий теоремы следует, что $F(\lambda)$ бесконечно дифференцируемая функция и в силу (5) $F^k(0) = 0$. Применяя известную теорему о квазианалитических классах [3] заключаем, что $F(\lambda) \equiv 0$. Следовательно $f(x) \equiv 0$ и $u(x,y) \equiv 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
2. *Айрапетян Г .М.* О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом // Математические заметки. 2004. Т. 76, вып. 5. С. 643–650.
3. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М., 1955.