

УДК 517.518

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

© Г. Акишев

akishev@kargu.krg.kz

Карагандинский государственный университет, Караганда, Казахстан

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $L_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ имеющих 2π -период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\dots \left[\int_0^{2\pi} \left(f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m) \right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{q_2}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{q_m}} dt_m \right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных, $\overset{\circ}{L}_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ — множество всех функций $f \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

$a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе. Положим

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i \langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

где $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in Z^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$.

Числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in Z^m}$, $\in l_{\bar{p}}$ если

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in Z^m}\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{ \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[\dots \left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} |a_{\bar{n}}|^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим класс О. В. Бесова

$$B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{\tau}} = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m) : \|f\|_{B_{\bar{p}, \bar{\theta}, \bar{\tau}}^{\bar{\tau}}} = \|f\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* + \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{\tau} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}}^* \right\} \right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq 1 \right\},$$

где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $1 \leq p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть дан положительный вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i \langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}\},$$

$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{p}, \bar{\theta}}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{\bar{p}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$.

Оценки порядка приближения различных функциональных классов в полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$ в пространствах Лебега с изотропными нормами исследовали К. И. Бабенко, С. А. Теляковский, Я. С. Бугров, Б. С. Митягин, Н. С. Никольская, Э. М. Галеев, Э. С. Белинский, Динь Зунг, Б. Базарханов, В. Н. Темляков, Б. С. Кашин, А. С. Романюк, А. И. тепанец, Н. Н. Пустовойтов.

В докладе будут представлены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1 \leq \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)} < +\infty$. Если $f \in \overset{\circ}{L}_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}}^*(I^m)$ и величина

$$\sigma(f) \equiv \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m \theta_m^{(2)} (\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})} \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1 \theta_1^{(2)} (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}} \right)^{\theta_1^{(2)}} \right]^{\frac{\theta_2^{(2)}}{\theta_1^{(2)}}} \dots \right]^{\frac{\theta_m^{(2)}}{\theta_{m-1}^{(2)}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m^{(2)}}}$$

конечна, то функция $f \in \overset{\circ}{L}_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}}^*(I^m)$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \leq C(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\theta}) \cdot \sigma(f).$$

Теорема 2. Пусть $\bar{\theta}^{(1)} = (\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_m^{(1)})$, $\bar{\theta}^{(2)} = (\theta_1^{(2)}, \dots, \theta_m^{(2)})$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\gamma_j = \frac{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}}{r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}}$, $j = 1, \dots, m$, и $1 \leq \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}, \tau_j < +\infty$, $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j$, $j = 1, \dots, m$, $r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \dots = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq \dots \leq r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$, Тогда справедливы соотношения

$$E_n^{\bar{\gamma}} \left(B_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}, \bar{\tau}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} = \sup_{f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}, \bar{\tau}}^{\bar{r}}} E_n^{\bar{\gamma}}(f)_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=2}^m \left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j} \right)}, & \theta_j^{(2)} < \tau_j, j = 1, \dots, m \\ 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})}, & \tau_j \leq \theta_j^{(2)}, j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Если $\tau_j \leq \theta_j^{(2)} < +\infty$, $j = 1, \dots, l < \nu$, $\theta_j^{(2)} < \tau_j < +\infty$, $j = l+1, \dots, m$, то

$$C_1 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=l+2}^m \left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j} \right)} \leq E_n^{\bar{\gamma}} \left(B_{\bar{p}, \bar{\theta}^{(1)}, \bar{\tau}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}, \bar{\theta}^{(2)}} \leq C_2 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=l+1}^m \left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}} - \frac{1}{\tau_j} \right)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $\theta_j^{(1)} = \theta_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, m$, эти утверждения ранее доказаны в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акишев Г. Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40.