Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 418–419

УДК 517.54

УРАВНЕНИЕ ЛЁВНЕРА. ПРИМЕНЕНИЯ

© **А. И. Александров, И. А. Александров**

aai@igrem.ru

Томский государственный университет, Томск

Доклад посвящен изложению результатов, относящихся к широкому кругу идей применения уравнения Лёвнера. Это уравнение составляет основу метода параметрических продолжений в теории однолистных функций, сыгравшего важную роль в доказательстве неравенств Бибербаха и при получении ранее и в дальнейшем многих других точных оценок. Уравнение Лёвнера первоначально возникло при изучении конформного отображения канонической области на область с разрезом по простой дуге переменной длины.

П. 1. Теорема 1 (из [1, 2]). *Решение* $\zeta = \zeta(\tau, z; \mu) = e^{-\tau} z + \dots$ *уравнения Лёвнера*

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}, \quad 0 \le \tau \le \tau^0, \quad 0 < \tau^0 \le +\infty, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной управляющей функцией $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, *и начальным условием* $\zeta(0, z; \mu) = z$, $z \in E = \{z \in C : |z| < 1\}$, *существует на* $(0, \tau^0)$, *однолистно и конформно отображает (при фиксированном* τ *) круг* E *на односвязную область* $B(\tau; \mu)$, *лежащую в единичном круге; если* $\tau^0 = +\infty$, *то функция* $f_\mu(z) = \lim\limits_{\tau \to +\infty} e^{\tau} \zeta(\tau, z; \mu)$ *принадлежит классу* S *(т. е. множеству функций* $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, *голоморфных и однолистных в* E *).*

П. 2. В формировании границы области $B(\tau; \mu)$ определенным образом участвуют решения $\zeta(\tau, z; \mu)$, $z \in \overline{E} \setminus E$, создающие простые концы этой области. Представляют интерес условия, остающиеся пока не сформулированными, при которых $\zeta(\tau, E; \mu)$ — круг с разрезом по кривой. Приведен пример последовательности $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau), \dots$ аналитических функций, равномерно сходящейся к такой функции $\mu(\tau)$, что хотя $\zeta(\tau, E; \mu)$ — круг с разрезом, но $\zeta(\tau, E; \mu)$ — круг с выброшенной луночкой.

П. 3. К эффективным представлениям некоторых подмножеств множества S можно прийти за счет удачного выбора $\mu(\tau)$ и последующего интегрирования уравнения (1).

Теорема 2 [3]. *Классу* S *принадлежат функции*

$$f(z) = \left[s(1 + i\delta) \int_0^z \frac{(1 - u) u^{s(1+i\delta)-1}}{(1 - e^{-i\varphi} u)^{2s+1}} du \right]^{\frac{1}{s(1+i\delta)}}, \tag{2}$$

где $s > 0$, $-\infty < \delta < +\infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

И. Е. Базилевич, рассматривая уравнение Лёвнера – Куфарева, получил интегральную формулу более общую, чем (2). Отметим здесь результаты Д. В. Прохорова, Г. Д. Садритдиновой, А. Н. Сыркашева.

П. 4. Представляют интерес обратные задачи. Проведены исследования двух типов таких задач. Восстановлены [4] управляющие функции $\mu(\tau)$, сответствующие экстремальным функциям относительно функционала $\arg f'(z)$, $f \in S$, $z \in E \setminus \{0\}$, и других простейших функционалов. Указан [5] алгоритм численного нахождения $\mu(\tau)$ для конформного отображения полуплоскости на плоскость с разрезом по лучу и примыкающей к нему дуге окружности. Он аналогичен алгоритму П. П. Куфарева [6] нахождения постоянных в интеграле Кристоффеля – Шварца, но оказался более сложным для численной реализации.

П. 5. Задача варьирования отображающей функции и её приближенного представления, первоначально поставленная Лаврентьевым и Люстерником, находит связь с уравнением Лёвнера. Пусть $\zeta(z,\tau)$, $\zeta(0,\tau)=0$, $\zeta'(0,\tau)=e^{-\tau}$, — функция, отображающая круг E на единичный круг с разрезом по начинающейся в точке $e^{i\varphi_0}$ простой дуге малой ддины. Тогда

$$\zeta(z,\tau)=z-z\tau\frac{e^{i\varphi_0}+z}{e^{i\varphi_0}-z}+o(\tau)$$

на компактах в E. Суперпозиция таких отображений позволяет перейти к более общим областям и рассматривать вопросы соответствия границ.

П. 6. Установлена связь $\zeta(\tau,z;-1)$ с производящими функциями некоторых ортогональных многочленов и и другими классами специальных функций. В частности, имеют место формулы, полученные с участием Г. А. Юферовой.

Теорема 3. *Справедливы формулы*

$$\frac{1}{1-z}\frac{d}{d\tau}\ln\zeta(\tau,z;-1)=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(1-2e^{-\tau})z^m=\sum_{l=0}^{\infty}F(-l,l+1;e^{-\tau})z^l,\quad |z|<1,$$

$$\zeta^m(\tau,z;-1)=e^{-m\tau}\sum_{l=m}^{\infty}\binom{m+l-1}{2m-1}F(m+l,m-l;2m+1;e^{-\tau})z^l,\quad |z|<1,$$

где $P_m(x)$ *— полиномы Лежандра,* $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ *— гипергеометрическая функция,* $m=1,2,\ldots$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
2. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск, Томский государственный университет, 2001. 220 с.
3. *Александров И. А.* Об одном случае интегрирования уравнения Лёвнера // Сибирский математический журнал. 1981. Т. XXII, № 2. С. 207–209.
4. *Александров И. А., Александров А. И.* Экстремальные управляющие функции в уравнении Лёвнера в теоремах вращения // Доклады РАН. 2000. Т. 371. С. 7–9.
5. *Замалиева И. В.* Отображение полуплоскости на круговой четырехугольник без внешних точек // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 38–45.
6. *Куфарев П. П.* Об одном численном методе определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца // Доклады АН СССР. 1947. Т. 57. С. 535–537.