

УДК 519.642

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© С. И. Безродных, В. И. Власов

sergeyib@pochta.ru, vlasov@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

1. Задача Римана – Гильберта в односвязной области g на комплексной плоскости z заключается в построении аналитической в этой области функции $f = u + iv$ по заданному на ее границе соотношению $\tilde{a}(z')u(z') - \tilde{b}(z')v(z') = \tilde{c}(z')$, $z' \in \partial g$. Если при этом в некоторых точках области g или границы ∂g предписано условие роста решения $f(z)$, то такую задачу называют сингулярной задачей Римана – Гильберта. При помощи конформного отображения $\varphi : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$ (приближенный метод построения отображения описан в п. 2) эта задача сводится к аналогичной задаче в верхней половине $\mathbb{H}^+$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. При этом исходное краевое условие переходит в аналогичное условие на вещественной оси:

$$\operatorname{Re} [h(\xi) \mathcal{P}^+(\xi)] = c(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

здесь $\mathcal{P}^+(\zeta) := f \circ \varphi^{-1}(\zeta)$, $h(\xi) := (\tilde{a} + i\tilde{b}) \circ \varphi^{-1}(\xi)$, $c(\xi) := \tilde{c} \circ \varphi^{-1}(\xi)$.

Уточним постановку задачи (1). Пусть $\{\xi_k\} := \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_K\}$ — конечное множество точек на границе $\mathbb{R}$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$, причем $\xi_0 := \infty$, а $n_0, n_1, \dots, n_K$ — заданные числа из $\mathbb{Z}^+$. Предположим, что функции h и c в (1) кусочно-гельдеровы с разрывами первого рода в точках $\{\xi_k\}$. Обозначим через α_k дробную часть величины $\pi^{-1} [\arg h(\xi_k + 0) - \arg h(\xi_k - 0)]$ при $k \neq 0$ и величины $\pi^{-1} [\arg h(+\infty) - \arg h(-\infty)]$ при $k = 0$; соответствующие целые части обозначаем $\varkappa_k$ и $\varkappa_0$. Пусть все $\alpha_k > 0$.

Требуется найти функцию $\mathcal{P}^+(\zeta)$, аналитическую в $\mathbb{H}^+$, непрерывную в $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\xi_k\}$, удовлетворяющую условию (1), а также следующим асимптотическим при $\zeta \rightarrow \xi_k$ соотношениям при $k \neq 0$: $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}]$, если $n_k \neq 0$, и $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(1)$, если $n_k = 0$, и следующему соотношению при $k = 0$: $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0})$, $\zeta \rightarrow \infty$.

Теорема 1. (i) Если индекс $\varkappa := n_0 - \varkappa_0 + \sum_{k=1}^K (\varkappa_k + n_k)$ неотрицателен, то решение $\mathcal{P}^+$ поставленной задачи имеет вид

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{X}^+(\zeta) \left[P_{\varkappa}(\zeta) + \frac{\mathcal{S}(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{c(t) dt}{\mathcal{S}(t) h(t) \mathcal{X}^+(t) (t - \zeta)} \right],$$

где $P_{\varkappa}(\zeta)$ — произвольный полином степени $\varkappa$ с вещественными коэффициентами,

$$\mathcal{X}^+(\zeta) := \prod_{k=1}^K (\zeta - \xi_k)^{-\varkappa_k - n_k} \exp[\mathcal{M}^+(\zeta)]$$

— каноническое решение задачи,

$$\mathcal{M}^{\pm}(\zeta) := \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{[\pi/2 - \arg h(t)] dt}{(t - \delta)(t - \zeta)}, \quad \mathcal{S}(\zeta) := (\zeta - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}} (\zeta^2 + 1)^{[\varkappa/2]};$$

здесь $\delta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}$.

(ii) Если $\varkappa = -1$, то единственным решением $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$ рассматриваемой задачи является функция

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \frac{\mathcal{X}^+(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{c(t) dt}{h(t) \mathcal{X}^+(t) (t - \zeta)}.$$

Если $\varkappa < -1$ и выполняются условия разрешимости $\int_{\mathbb{R}} t^k c(t) [h(t) \mathcal{X}^+(t)]^{-1} dt = 0$ при $k = 0, 1, \dots, |\varkappa| - 2$, то единственное решение задачи дается той же формулой. Если же $\varkappa < -1$ и условия разрешимости не выполнены, то эта задача не имеет решений.

2. Пусть g — конечная односвязная область со спрямляемой границей ∂g , которая состоит из двух звеньев γ и Γ (т.е. $\partial g = \gamma \cup \Gamma$), соединяющихся между собой в точках A_1 и A_2 . Пусть еще γ в некоторых окрестностях этих точек является дугой Ляпунова, а Γ представляет собой жорданову кусочно-гладкую кривую. Тогда будем говорить, что область g удовлетворяют условию (γ, Γ) и писать $g \in (\gamma, \Gamma)$.

Расширением области $g \in (\gamma, \Gamma)$ через дугу Γ будем называть область G , для которой выполняются следующие включения: $g \subset G$, $\gamma \subset \partial G$, $\text{int } \Gamma \subset G$, а контур ∂G в некоторых окрестностях точек A_1 , A_2 представляет собой дугу Ляпунова.

Пусть $g \in (\gamma, \Gamma)$ и G — расширение области g через дугу Γ . Конформное отображение $\Phi : G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ подчиним следующим условиям: $\Phi(N) = 0$, $\Phi(M) = \infty$, где $N \in \text{int } \gamma$, $M \in \partial G \setminus \gamma$. Введем также отображение $\mu : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{U}^+$, где $\mathbb{U}^+ := \mathbb{H} \cap \{|w| < 1\}$ — полукруг, удовлетворяющее условиям $\mu(A_1) = -1$, $\mu(N) = 0$, $\mu(A_2) = 1$.

На дуге Γ введем функцию $h(z) := -\ln |\Phi(z)|$, определим систему функций $\{\Omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле $\Omega_k(z) := \text{Re} [\Phi(z)]^k$ и, обозначив через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$, рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{l=0}^N (\Omega_k, \Omega_l) a_l^N = (\Omega_k, h), \quad k = 0, \dots, N \quad (2)$$

относительно величин $(a_0^N, \dots, a_N^N)$. Верхний индекс N у величин a_l^N подчеркивает их зависимость от размера системы уравнений (2). Справедлива следующая

Теорема 2. Последовательность функций $\{\mu_N(z)\}_N$, определяемых по формуле

$$\mu_N(z) := \Phi(z) \exp \left[\sum_{k=0}^N a_k^N \Phi^k(z) \right],$$

где $(a_0^N, \dots, a_N^N)$ — решение системы (2), равномерно сходится к функции $\mu(z)$ на множестве $g \cup \text{int } \gamma$, причем эту последовательность можно дифференцировать произвольное число раз на объединении g и аналитических участков γ .

Из теоремы 2 вытекает, что последовательность функций $\varphi_N(z) := T \circ \mu_N(z)$, где $T(w) := (1+w)^2/(1-w)^2$, сходится на множестве $g \cup \text{int } \gamma$ к функции $\varphi(z)$, конформно отображающей область g на верхнюю полуплоскость, причем эта последовательность допускает дифференцирование произвольное число раз на объединении g и аналитических участков γ .

Приведенные результаты были применены при реализации модели пересоединения магнитного поля, а также к некоторым задачам теории упругости, сводящимся к задаче Римана — Гильберта в сложной области с кусочно-гельдеровыми коэффициентами и условиями роста в некоторых точках границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503), программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 и программы РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики".