Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 430–431

УДК 517.957:517.548

УСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СТРОЯЩИХСЯ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНОВ

© А. А. Егоров

yegorov@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Первые результаты по устойчивости классов плоских и пространственных конформных отображений были получены М. А. Лаврентьевым при исследовании квазиконформных отображений. Теория устойчивости конформных отображений, возникшая в рамках теории квазиконформных отображений, в дальнейшем развивалась главным образом усилиями самого М. А. Лаврентьева, а также П. П. Белинского и Ю. Г. Решетняка. Отталкиваясь от теории устойчивости конформных отображений, А. П. Копылов предложил общую концепцию устойчивости в C-норме классов отображений, названную им концепцией ξ-устойчивости (см., например, [1]). В рамках концепции ξ-устойчивости получены теоремы об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений, классов решений эллиптических систем линейных уравнений в частных производных, классов гомотетий и ряда других классов отображений (см., например, работы А. П. Копылова, Н. С. Даирбекова, Т. В. Соколовой и др.).

Развивая теорию ξ-устойчивости, в работах [2–4] мы исследуем устойчивость классов решений $u\colon V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ нелинейных дифференциальных уравнений

$$F(u'(x)) = G(u'(x)) \quad \text{для п. в. } x \in V, \tag{1}$$

строящихся с помощью квазивыпуклых функций F и нуль-лагранжианов G. Здесь $u'(x)$ — матрица Якоби отображения u в точке $x \in V$. Непрерывная функция $F\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, заданная на пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных $m \times n$-матриц, называется *квазивыпуклой* в смысле Ч. Б. Морри, если $|B(0,1)|F(\zeta) \le \int_{B(0,1)} F(\zeta + \varphi'(x))\,dx$ для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ и матриц $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а функция $G\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ называется *нуль-лагранжианом* в смысле Дж. Болла, если G и $-G$ являются квазивыпуклыми функциями. Здесь для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ величина $|A|$ есть его внешняя мера Лебега. Большинство упомянутых выше классов отображений могут быть рассмотрены как классы решений уравнений вида (1). Например, сохраняющие ориентацию конформные отображения являются решениями уравнения (1) с $F(\zeta) = |\zeta|$ и $G(\zeta) = \det\zeta$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Здесь $|\zeta|$ — операторная норма матрицы $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Множество $\Gamma_n^k := \{I = (i_1,\dots,i_k) : 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n,\ i_\varkappa \in \{1,\dots,n\},\ \varkappa = 1,\dots,k\}$ состоит из k-наборов упорядоченных индексов. Если $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $I = (i_1,\dots,i_k) \in \Gamma_n^k$, то полагаем $x_I := (x_{i_1},\dots,x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$. Для $J = (j_1,\dots,j_k) \in \Gamma_m^k$ и $I = (i_1,\dots,i_k) \in \Gamma_n^k$ величина $\det_{JI}\zeta := \det\begin{pmatrix} \zeta_{j_1 i_1} & \cdots & \zeta_{j_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{j_k i_1} & \cdots & \zeta_{j_k i_k}\end{pmatrix}$ есть $k\times k$-минор матрицы $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{m1} & \cdots & \zeta_{mn}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Фиксируем число $k \in \mathbb{N}$, $2 \le k \le \min\{n,m\}$. Для непрерывных функций $F\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ и $G\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ мы считаем, что выполнены следующие предположения: (H1) F является квазивыпуклой функцией; (H2) G является нуль-лагранжианом; (H3) F и G положительно однородны степени k, т. е. $F(t\zeta) = t^kF(\zeta)$ и $G(t\zeta) = t^kG(\zeta)$ для всех чисел $t > 0$ и матриц $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$; (H4) $\sup\{K \ge 0 : F(\zeta) \ge KG(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}\} = 1$; (H5) $c_F := \inf\{F(\zeta) : \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n},\ |\zeta| = 1\} > 0$; (H6) $d_G := \sup\bigl\{\sum_{J\in\Gamma_m^k, I\in\Gamma_n^k} |\gamma_{JI}||x_I|^2 : x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\bigr\} < kc_F/(n -$

k) в случае $k < n$. Здесь коэффициенты $\gamma_{JI} \in \mathbb{R}$ из представления k-однородного нуль-лагранжиана G в виде линейной комбинации $k \times k$-миноров: $G(\zeta) = \sum_{J \in \Gamma_m^k, I \in \Gamma_n^k} \gamma_{JI} \det_{JI} \zeta$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Для $K \geq 1$ обозначим через $\mathfrak{G}(K) = \mathfrak{G}_{F,G}(K)$ класс отображений $v \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$, определенных на областях $V \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих неравенству $F(v'(x)) \leq KG(v'(x))$ для п. в. $x \in V$. Обозначим через W^1 класс отображений $v\colon V \to \mathbb{R}^m$, определенных на областях $V \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условию $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$ для некоторого $p = p(v) > n$.

Из условия (H4) следует, что класс $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(1)$ состоит из решений u уравнения (1).

Основным результатом об устойчивости класса $\mathfrak{G}$ является следующая теорема [4].

Теорема 1. *Пусть функции F и G удовлетворяют предположениям* (H1)–(H6). *Тогда класс $\mathfrak{G}$ ξ-устойчив относительно класса W^1.*

Следуя А. П. Копылову [1], говорят, что класс $\mathfrak{G}$ является *ξ-устойчивым относительно класса W^1*, если класс $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям ξ-нормальности $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_6$ из [1] и существует функция $\alpha = \alpha_{\mathfrak{G}}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = \alpha(0) = 0$ и $\xi(v, \mathfrak{G}) \leq \alpha(\Xi(v, \mathfrak{G}))$ для всех отображений $v \in W^1$. Здесь функционал $\xi(\cdot, \mathfrak{G})$ глобальной близости и функционал $\Xi(\cdot, \mathfrak{G})$ локальной близости определяются следующим образом [1]. Возьмем число $\rho \in (0, 1)$ и шар $B = B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$. Для локально ограниченного отображения $v\colon B \to \mathbb{R}^m$ обозначим через $\xi_{\rho,B}(v, \mathfrak{G})$ точную нижнюю грань чисел $\varepsilon \geq 0$, для которых найдется отображение $u\colon B \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$ такое, что $\|v - u\|_{C(B(x,\rho r); \mathbb{R}^m)} \leq \varepsilon \operatorname{diam} v(B)$. Функционал $\xi_B(v, \mathfrak{G}) := \int_0^1 \xi_{\rho,B}(v, \mathfrak{G})\, d\rho$ измеряет близость отображения v к классу $\mathfrak{G}$ в равномерной метрике внутри шара B, отнесенной к размерам $v(B)$. Для отображения $v\colon V \to \mathbb{R}^m$, определенного на области $V \subset \mathbb{R}^n$, мы полагаем $\xi(v, \mathfrak{G}) := \sup\{\xi_B(v, \mathfrak{G}) : B \subset V\}$ и $\Xi(v, \mathfrak{G}) := \sup\{\liminf_{r \to 0} \xi_{B(x,r)}(v, \mathfrak{G}) : x \in V\}$. Здесь в определении $\xi(v, \mathfrak{G})$ точная верхняя грань берется по всем шарам B, лежащим в области V. Функционал $\xi(v, \mathfrak{G})$ глобальной близости измеряет близость отображения v к классу $\mathfrak{G}$ внутри каждого шара, компактно содержащегося в области определения отображения v, а функционал $\Xi(v, \mathfrak{G})$ локальной близости — во всех малых шарах из области определения отображения v. Таким образом, теорема 1 означает, что отображение $v \in W^1$, локально близкое к отображениям класса $\mathfrak{G}$, глобально близко к ним в C-норме на каждом шаре, компактно содержащемся в области определения отображения v. Из теоремы 1 и теоремы 1.1.2 монографии [1] следует, что локально близкое к классу $\mathfrak{G}$ отображение $v \in W^1$ глобально близко в C-норме к отображениям класса $\mathfrak{G}$ не только на шарах, но и на любой подобласти, компактно содержащейся в области определения отображения v.

Важным шагом в доказательстве теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *существует функция $\bar{\alpha}(\varepsilon) = \bar{\alpha}_{F,G}(\varepsilon)$, определённая для $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ и такая, что $\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\alpha}(\varepsilon) = \bar{\alpha}(0) = 0$ и для каждого отображения $v \in W^1$ неравенство $\Xi(v, \mathfrak{G}) \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ влечёт $v \in \mathfrak{G}(1 + \bar{\alpha}(\varepsilon))$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006 г. № 117 и Фонда содействия отечественной науке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Егоров А. А.* Устойчивость классов решений дифференциальных соотношений, построенных с помощью выпуклых и квазиаффинных функций // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 2003. С. 275–288.
3. *Egorov A. A.* Stability of classes of solutions to partial differential relations constructed by quasiconvex functions and null Lagrangians // EQUADIFF 2003. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2005. P. 1065–1067.
4. *Егоров А. А.* Устойчивость классов отображений, квазивыпуклость и нуль-лагранжианы // Докл. РАН (принята к печати).