

УДК 512.812.2+514.752.8+517.9

ТЕОРЕМЫ О КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ ДЛЯ C^1 -ГЛАДКИХ ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© А. В. Грешнов

greshnov@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть на некоторой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^N$ заданы C^1 -гладкие векторные поля $X_1, \dots, X_N$ такие, что для каждой точки $g \in U$ вектора $X_1(g), \dots, X_N(g)$ линейно независимы, т. е. U — C^1 -гладкое параллелизуемое многообразие, ср. с [1]. Пусть каждому векторному полю X_j соответствует некоторое натуральное число $\deg X_j < N$ такое, что

$$[X_i, X_j] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j \geq \deg X_k} C_{ijk}(g) X_k, \quad g \in U,$$

для некоторых непрерывных на U функций C_{ijk} , см. [2]. Данный набор векторных полей в дальнейшем обозначаем символом X , символом (U, X) обозначаем область U , «снабженную» базисом векторных полей X .

Для каждой точки $g \in U$ обозначим через $\theta_g : (x_1, \dots, x_N) \rightarrow O_g \subset U$ локальную систему координат первого рода. Символом Δ_t^g , $t \geq 0$, далее обозначается неоднородный оператор растяжения, действующий по правилу

$$\Delta_t^g = \theta_g \circ \delta_t \circ \theta_g^{-1}, \quad \text{где} \quad \delta_t(x_1, \dots, x_N) = (t^{\deg X_1} x_1, \dots, t^{\deg X_N} x_N).$$

Пусть $\varepsilon^{\deg X_j} X_j = X_j^\varepsilon$, $j = 1, \dots, N$.

Нами доказано следующее

Утверждение [3]. Существует некоторая окрестность O точки g такая, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ на множестве O имеют место следующие равномерные сходимости

$$(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g)_* X_i^\varepsilon \rightarrow \hat{X}_i^g, \quad [(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g)_* X_i^\varepsilon, (\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g)_* X_j^\varepsilon] \rightarrow [\hat{X}_i^g; \hat{X}_j^g], \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Векторные поля $\{\hat{X}_j^g\}$ удовлетворяют на O следующей «таблице коммутаторов»

$$[\hat{X}_i^g, \hat{X}_j^g] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \hat{C}_{ijk} \hat{X}_k^g.$$

Тогда, следуя работе [2], мы можем ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3]. Односвязная нильпотентная группа Ли G , соответствующая алгебре Ли $\{\hat{X}_j^g\}$, называется *нильпотентным касательным конусом* параллелизуемого многообразия (U, X) в выделенной точке $g \in U$.

Утверждение получено при помощи аналитических методов группового анализа дифференциальных уравнений, разработанных Л. В. Овсянниковым [4]. Другими методами утверждение и определение были получены ранее в работе [2] для систем координат 2-го рода.

Используя методы аппроксимации, утверждение обобщено нами на случай липшицевых векторных полей. Также в качестве следствия нами доказано существование квазиметрик Карно – Каратеодори d_{cc} на (U, X) ; для квазипространств (O, d_{cc}) доказаны теорема о существовании нильпотентного касательного конуса (O, d_c^g) (который рассматривается как локальная

группа Карно с соответствующей квазиметрикой d_c^g) в выделенной точке $g \in O$ и следующий аналог локальной аппроксимационной теоремы Громова.

Теорема. Пусть $B_{cc}(x, r)$, $B_c^g(x, r)$ — открытые шары в квазиметриках d_{cc} , d_c^g соответственно. Тогда

$$B_c^g(\hat{g}, \lambda\varepsilon) \subset B_{cc}(\hat{g}, \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)) \quad \text{и} \quad B_{cc}(\hat{g}, \lambda\varepsilon) \subset B_c^g(\hat{g}, \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)),$$

где $\hat{g} \in B(g, \varepsilon)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, а величины $o(\varepsilon)$ равномерны по $\hat{g}$.

Доказательство теоремы основано на свойствах отображения θ_g , а также использует некоторые результаты работы [5].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00735-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
2. Gromov M. Carnot – Caratheodory spaces seen from within // в книге: Sub-Reimannian Geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
3. Грешнов А. В. О методах группового анализа дифференциальных уравнений на C^1 -гладких параллелизуемых многообразиях // (в печати)
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Грешнов А. В. Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно – Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2.