

УДК 517.597

НЕРАВЕНСТВО СОБОЛЕВА ПО ФИНСЛЕРОВОЙ МЕРЕ

© Е. Г. Григорьева

e_grigoreva@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Пусть в области $D \subset \mathbf{R}^n$ задана неотрицательная непрерывная функция $\Phi : D \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ со свойствами:

- (а) для всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \geq 0$ выполнено $\Phi(x, \lambda\xi) = \lambda\Phi(x, \xi)$;
- (б) $\Phi(x, \xi)$ выпукла по переменной ξ ;
- (с) для всех $x \in D$ множество $\Xi(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^n : \Phi(x, \xi) \leq 1\}$ локально равномерно ограничено.

Рассмотрим двойственную функцию для множества $\Xi(x)$:

$$H(x, \eta) = \sup_{\xi \in \Xi(x)} \langle \eta, \xi \rangle,$$

где $\langle \eta, \xi \rangle$ — скалярное произведение векторов ξ и η . Так как $H(x, \eta)$ является положительной однородной степени 1 по переменной η функцией, то мы можем определить в D финслерову метрику (см. [1])

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} H(x, dx) \quad \forall x, y \in D,$$

где точная нижняя грань берется по всем локально спрямляемым путям $\gamma \subset D$, соединяющим точки $x, y \in D$. Область D с так определенной финслеровой метрикой будем называть *финслеровым пространством*.

Пусть $\sigma : D \rightarrow \mathbf{R}$ — неотрицательная измеримая функция. Тогда для любого множества $B \subset D$ финслерова мера B определяется равенством (см. [1])

$$|B|_{\mu} = \int_B d\mu = \int_{\{x \in B\}} \sigma(x) dx.$$

Обозначим среднее значение функции $u = u(x) \in L^1_{\text{loc}}(D)$ через

$$u_B = \frac{1}{|B|_{\mu}} \int_B u(x) d\mu.$$

Для формулировки теоремы сделаем два дополнительных предположения:

- 1) Пусть $x_0 \in D$ — произвольная точка и $B(x_0, R) = B_R = \{x \in D : d(x, x_0) < R\}$ — шар в метрике $d(x, y)$ с центром x_0 радиуса R . Предположим, что существует постоянная $C = C(x_0, R)$ такая, что

$$\sigma(x) \leq C(x_0, R), \quad \forall x \in B_R.$$

- 2) Для любой функции $u \in W^{1,1}(B_R)$ найдется измеримая локально ограниченная в D функция $C(x)$ такая, что

$$|u(x) - u_{B_R}| \leq \frac{C(x)}{|B_R|_{\mu}} \int_{B_R} \frac{\Phi(x, \nabla u(x))}{d^{n-1}(x, y)} d\mu.$$

Теорема 1. Если справедливы предположения (1) и (2), тогда существует постоянная $C_0 = C_0(H, n, x_0, R)$ такая, что для всех точек $x_0 \in D$, всех шаров $B_R \subset D$ радиуса R с центром в точке x_0 и для всех функций $u = u(x) \in W_0^{1,1}(B_R)$ справедливо неравенство

$$\left[\int_{B_R} |u(x) - u_{B_R}|^{\frac{n}{n-1}} d\mu \right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{C_0}{|B_R|_\mu^{1-\frac{1}{n}}} \int_{B_R} \Phi(x, \nabla u(x)) d\mu,$$

где

$$C_0 = \left[C(x_0, R) 2^{2+n/(n-1)} \omega_{n-1} \right]^{\frac{n-1}{n}} \cdot \sup_{x \in B_R} \left\{ \sup_{w \in S^{n-1}} \int_0^{\rho(w)} \sigma(x + \rho w) \rho^{n-1} h(\rho, w) d\rho \right\},$$

$$h(\rho, w) = \sup_{0 \leq s \leq \rho} \frac{H(x + sw, w)}{\sigma(x + sw)}, \quad \rho(w) = \sup_{(x+\rho w) \in B_R} \rho.$$

Теорема 2. Для любого $1 \leq q < +\infty$, $0 \leq \delta(p, q) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{n}$ существует постоянная C_1 такая, что для всех измеримых множеств $B \subset D$ и всех функций $u \in W^{1,p}(D)$ выполнено

$$\left[\int_B |u(x) - u_B|^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}} \leq C_1 \left(\int_B (\Phi(x, \nabla u(x)))^p d\mu \right)^{1/p},$$

где

$$C_1 = \sup_{x \in B} \left\{ \sup_{w \in S^{n-1}} \int_0^{\rho(w)} \sigma(x + \rho \cdot w) \rho^{n-1} d\rho \right\} \cdot \sup_{x \in B} \left\{ \int_B \left[\frac{H(y, x-y)}{|x-y|^n} \right]^{\frac{1}{1-\delta}} d\mu \right\}^{1-\delta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что постоянные C_0 и C_1 в правой стороне неравенств из теоремы 1 и теоремы 2 являются асимптотически точными, поскольку в случае, когда $\Phi(x, \xi) = |\xi|$, эти постоянные не зависят от области.

Наш подход к доказательству теоремы 1 следующего изопериметрического неравенства:

Лемма (изопериметрическое неравенство). Для любого открытого множества B с липшицевой границей такого, что $\overline{B} \subset B_R$, выполнено

$$|B|_\mu^{\frac{n-1}{n}} \leq C \cdot \int_{\partial B} \Phi(x, \eta(x)) d\mu,$$

где $\eta(x)$ — единичный вектор нормали к границе ∂B .

При доказательстве данного неравенства были использованы некоторые идеи из статьи [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим также, что теорема 1 остается справедливой и в случае, когда в предположении (2) вместо $d(x, y)$ взято $|x - y|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. С. 36–43.
2. Capogna L., Danielli D., Garofalo N. The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality // Comm. In Analysis and Geom. 1994. T. 2, № 2. С. 203–215.