Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 434–435

УДК 515.125+517.550.2

КЛАССИФИКАЦИЯ СТРУН И ПУЧКОВ СТРУН ОБЛАСТЕЙ И ИХ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЯХ

© **А. П. Кармазин**

kap@kpm.surgu.ru

Сургутский государственный университет, Сургут

В работе с помощью теории предконцов (см. [1]) дана классификация струн областей евклидова пространства R^n, $n \geq 2$. Понятия струны и полуструны области введены в [2]. В терминах отображений, гомеоморфизм $\alpha : (-1, 1) \to D$ есть *струна* в области $D \subset R^n$ если его предельные множества $C(\alpha, 1)$, $C(\alpha, -1)$ лежат на евклидовой границе ∂D области D; гомеоморфизм $\alpha : [-1, 1) \to D$ есть *полуструна* в D, если $C(\alpha, 1) \subset \partial D$. Нас будет интересовать классификация полуструн с точки зрения их асимптотического поведения при приближении к границе области. В основном в работе изучаются различные метрические характеристики асимптотического поведения полуструн. Отсюда возникает следующая терминология. Пусть D есть гомеоморфная шару область R^n, $\lambda_D(x, y)$ — некоторая внутренняя метрика в D. Тогда любую полуструну в метрическом пространстве (D, λ_D) называем λ-полуструной в D.

Сначала в работе дается первоначальная традиционная классификация λ-полуструн области. Рассматриваются множества спрямляемых и достижимых λ-полуструн из D, и изучается их поведение при λ-квазиизометриях областей. Под λ-*квазиизометрией* областей $D, G \subset R^n$ понимается гомеоморфизм $f : D \to G$, при котором метрики λ_D, λ_G областей D, G будут квазиинвариантны.

Последующая основная классификация λ-полуструн связана с различными множествами граничных элементов области D, к которым может сходиться рассматриваемая λ-полуструна. Говорим, что λ-полуструна $\alpha : [-1, 1) \to D$ является *идеальной*, *главной*, *основной* или *общей* λ-полуструной в D, если она соответственно будет в первом случае — представителем некоторого элемента идеальной по М. Громову λ-границы области D (см. [1], [3]); во втором — образующей кривой некоторого простого λ-предконца области D (см. [1]); в третьем — сходиться к элементу $\varphi \in \Phi_0^\lambda[D]$ (см. [1]); и в четвертом — сходиться к некоторой λ-молекуле области D (см. [1]). Далее, две λ-полуструны какого-либо введенного выше типа называются *эквивалентными*, если они сходятся к одному и тому же соответствующему граничному элементу области. Изучены взаимосвязи между различными типами λ-полуструн и их поведение при λ-квазиизометриях областей. Устанавливается, что любая область D, гомеоморфная шару, секвенциально предкомпактна по множеству своих основных λ-полуструн, а любые два различных класса эквивалентных общих λ-полуструн отделимы друг от друга.

Затем в работе на основе понятия полного бруска области (см. [1]) вводится понятие λ-пучка главных λ-полуструн области. Определены три типа (эллиптических, параболических и гиперболических) λ-пучков области, в зависимости от того, какими свойствами обладает полный брусок, к которому сходятся представители данного λ-пучка. А именно, пусть P есть простой λ-конец области D (см. [1]), $\{q_k\}$ — цепь сечений области D, принадлежащая P, $\{d_k\}$ — соответствующая ей цепь подобластей из D. Говорим, что сечение σ области D *принадлежит* P, $\sigma \in P$, если оно разделяет некоторые два сечения из цепи $\{q_k\}$. В области D определим функцию:

$$h^\lambda(x, P) = \begin{cases} \lambda_D(q_1), x \in D \setminus d_1, \\ \inf\{\lambda_D(\sigma), x \in \sigma, \sigma \in P\}, x \in d_1. \end{cases}$$

Говорим, что λ-пучок Q области D является *эллиптическим*, если для любого его представителя $\alpha : [0,1) \to D$ будем иметь, что

$$\lim_{t\to 1} h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) = 0;$$

параболическим, если одновременно

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\, h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) > 0, \quad \underline{\lim_{t\to 1}}\, h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) = 0;$$

и *гиперболическим*, если

$$\underline{\lim_{t\to 1}}\, h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) > 0$$

(здесь $P(\alpha)$ есть простой λ-конец области D, индуцированный кривой α).

Наличие λ-пучка какого-либо типа позволяет судить о степени сложности строения рассматриваемой области, и дает возможность получить некоторую классификацию областей евклидова пространства. Определены семейства соответственно эллиптических, параболических и гиперболических областей R^n. Рассмотрены свойства λ-пучков различных типов. Показано, что λ-пучки и их типы инвариантны при λ-квазиизометриях областей, и что любые два различных λ-пучка области обязательно отделимы друг от друга. Описан класс областей, предкомпактных по множеству своих λ-пучков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кармазин А. П.* Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей. Сургут: изд-во СурГУ, 2003. 210 с.
2. *Vaisala J.* Quasisimmetric maps of products of curvies into the plane // Revue Roumaine Mathematiques Pures et Appliqués. 1988. T. 33, N 1–2. P. 147–156.
3. *Кармазин А. П.* Множество предконцов и идеальная граница многообразия без края // Мат. заметки. 2002. Т. 71, вып. 4. С. 554–557.