

УДК 517.54

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

© А. Н. Кондрашов

ankondr@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Пусть $D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — односвязная область, $z = x_1 + ix_2 \in D$, и $\mu(z)$ — комплекснозначная измеримая в D функция. Будем рассматривать уравнение Бельтрами

$$w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z, \quad z \in D \quad (1)$$

где $w = u_1 + iu_2$.

Если

$$|\mu(z)| < 1 \text{ п.в. в } D, \quad (2)$$

то при различных дополнительных ограничениях на μ известны (см., например, [1]) версии теоремы о существовании и единственности гомеоморфного в D решения уравнения (1). Что можно сказать о существовании и единственности решений уравнения Бельтрами, если условие (2) не выполняется: имеются точки в которых $|\mu(z)| < 1$ и точки в которых $|\mu(z)| > 1$?

Нами установлено следующее утверждение.

Теорема. Если $\mu(z) : D \rightarrow \mathbb{C}$ — такова, что функция

$$K(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{|1 - |\mu(z)||}$$

является локально $W^{1,2}$ -мажорируемой в D , то существует гомеоморфизм $w : D \rightarrow w(D) = \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, т.ч.

1) $w \in W_{loc}^{1,2}(D)$ и $w^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(\mathcal{D})$.

2) в подобластях где $|\mu(z)| < 1$, уравнению Бельтрами удовлетворяет $w(z)$, а в подобластях где $|\mu(z)| > 1$ ему удовлетворяет $\overline{w(z)}$.

Гомеоморфизм единственный с точностью до конформного отображения в w -плоскости.

Другие результаты об уравнениях Бельтрами переменного типа содержатся, например, в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Martio O., Miklyukov V. On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation // Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint 347. 2003. P. 1–12.
2. Srebro U., Yakubov E. Branched folded maps and alternating Beltrami equations // Journal d'analyse mathematique. 1996. V. 70. P. 65–90.