

УДК 517.54

© Л. С. Копанева

copanev_d@mail.ru

Томский государственный университет, Томск

Н. И. Лобачевский при вычислении объема конкретных фигур в неевклидовой геометрии [1] использовал специальное отображение $L(x) = -\int_0^x \ln \cos t \, dt$, носящее сегодня его имя.

Продолжение отображения $f(x) = \ln \cos x$ с вещественной оси на верхнюю полуплоскость $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ дает однолиственное голоморфное отображение $w = f(z) = C_1 \ln \cos z + C_2$, у которого множество значений

$$f(\Pi) = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = a + k\pi, -\infty < \operatorname{Im} w \leq b\} \right)$$

есть область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости. Начиная с работы [2] ведется систематическое изучение класса однолистных голоморфных в Π отображений с симметрией переноса вдоль вещественной оси, т. е. обладающих свойством: $\exists t, T \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x + kt) = f(z) + kT$, $k \in \mathbb{Z}$. Кроме приведенного отображения на сегодня известны следующие конкретные элементарные отображения. Отображение (α) $f(z) = C_1 (z - 2 \ln \sin(\frac{z}{2} + a)) + C_2$, у которого $f(\Pi)$ есть плоскость с разрезами по параллельным лучам под углом θ к вещественной оси. Отображение (β) $f(z) = C_1 (z + i \ln(1 - \cos z)) + C_2$, у которого $f(\Pi)$ есть плоскость с исключенными замкнутыми областями $D_k = D + 2k\pi$, $\partial D = \{w \in \mathbb{C} : 2w = t + i \ln(1 - \cos t), -2\pi < t < 0\}$. Отображение (γ) $f(z) = C_1 \arcsin(A \sin \frac{z}{2}) + C_2$, у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с разрезами по параллельным отрезкам, перпендикулярным вещественной оси. Отображение (δ)

$$f(z) = \left(\ln \left(\sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2} - \sqrt{\sin z} \right) + \arcsin \left(\sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2} \right) \right) + C_2,$$

у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с добавленными равнобедренными треугольниками, имеющими общие вершины и углом при основании $\frac{\pi}{4}$.

Отображения (α) при $\theta = \frac{\pi}{4}$ и (β) получены с помощью уравнения типа Левнера для рассматриваемого класса [3]. Отображения (α) и (δ) получены с помощью формулы типа Кристоффеля – Шварца [4].

Следующие отображения являются новыми. Отображение

$$f(z) = C_1 \arccos \frac{1}{2} \left((1 + r^2) \cos \frac{z}{2} + \sqrt{(1 + r^2)^2 \cos^2 \frac{z}{2} - 4r^2} \right) + C_2,$$

у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с исключенными замкнутыми областями $D_k = D + 2k\pi$, $\partial D = \{w \in \mathbb{C} : \cos \frac{z}{2} = re^{it}, \pi \leq t \leq 3\pi\} \cup \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = b, |\operatorname{Re} w - \pi| \leq 2 \arccos r\}$.

Отображение $w = f(z)$, определяемое неявно равенством $\sqrt{\cos^2 w + a} = A + B \cos z$, у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с разрезами по параллельным отрезкам разной длины, перпендикулярным вещественной оси.

Отображение (γ) и новые отображения получены с использованием принципа симметрии.

Константы определяются геометрией отображения и их можно подобрать так, чтобы

$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (f(z) - z) = 0$ равномерно относительно $\operatorname{Re} z$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений, М.-Л., Гостехиздат, 1951. Т. 3
2. *Александров И. А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Известия ВУЗов. Математика. 1999. № 6(445). С. 15–18.
3. *Копанева Л. С.* Параметрическое представление отображений с симметрией переноса // В сб. Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск, 2001. С. 135–144.
4. *Копанев С. А., Копанева Л. С.* Формула типа Кристоффеля – Шварца для счетноугольника // Вестник ТГУ. Серия Математика. Кибернетика. Информатика. Томск, ТГУ. 2003. Т. 280. С. 52–54.