

СИММЕТРИЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

© В. Н. Кутрунов

vkutrunov@utmn.ru

Тюменский государственный университет, Тюмень

В работе [1], был введён кватернионный интегральный оператор оператор A по правилу

$$A(p) = \pi^{-1} \int_l h n_x p(x) dl_x, \quad y \in l,$$

где l — граница некоторой плоской области S , n_x — внешняя нормаль в точке x границы l , $h = \nabla_x \ln|r|$, $|r| = |x - y|$, $x, y \in l$. Здесь в представлениях нормали и градиента вместо ортов декартова базиса стоят мнимые единицы кватернионов и все арифметические операции выполняются по правилам операций с кватернионами. В рассматриваемом плоском случае будет рассматриваться кватернионная гёльдеровская функция двух переменных $p(x_1, x_2) = q_0(x_1, x_2) + e_1 q_1(x_1, x_2) + e_2 q_2(x_1, x_2) + e_3 q_3(x_1, x_2)$, где e_i — мнимые единицы, а q_0 , q_i — действительная и мнимые части кватернионной функции $p(x)$. Доказывается кватернионное тождество

$$A^2 p = p$$

Вводятся интегральные операторы B , C , D , F по правилу

$$\begin{aligned} Bq_0 &= \pi^{-1} \int_l q_0 h \cdot n_x dl_x, \quad Cq_0 = \pi^{-1} \int_l q_0 h \times n_x dl_x \\ Dq &= \pi^{-1} \int_l [-qh \cdot n_x + (h \times n_x) \times q] dl_x, \quad Fq = \pi^{-1} \int_l q \cdot (h \times n) dl_x \end{aligned}$$

где $(\cdot)$, $(\times)$ — скалярное и векторное произведения и $q_0(x)$, $q(x)$ интерпретируются как произвольные скалярная и векторная гёльдеровские функции, заданные на l . Тогда записанное тождество можно представить в виде четырёх интегральных тождеств:

$$B^2 q_0 - FCq_0 = q_0, \quad BFq - FDq = 0, \quad -CBq_0 + DCq_0 = 0, \quad -CFq + D^2 q = q$$

В случае $y \notin l$, оператор B известен как потенциал двойного слоя. Используя эти тождества и структуру операторов B , C , D , F , можно доказать следующие теоремы:

Теорема 1. За исключением $\lambda = \pm 1$ собственные числа оператора D совпадают с собственными числами оператора потенциала двойного слоя B . Собственные функции взаимно пересчитываются с помощью равенств

$$(Dq = \lambda q, \quad By = \lambda y), \quad Cy = (\lambda^2 - 1)q, \quad Fq = y.$$

Теорема 2. За исключением точек $\lambda = \pm 1$ собственные числа операторов B , D симметричны относительно нуля. Собственные функции φ , φ^* , соответствующие собственным числам λ и $-\lambda$ оператора B , связаны соотношением $\varphi = k \cdot C\varphi^*$, где k — единичный вектор, ортогональный области S . Собственные функции ψ , ψ^* , оператора D , соответствующие собственным числам λ , $-\lambda$ связаны соотношением $\psi = C(k \cdot \psi^*)$.

Теорема 3. На классе гёльдеровских функций спектр оператора D действительный, состоит из собственных чисел конечной кратности $\pm\lambda$, $|\lambda| < 1$ и собственных чисел ± 1 , являющихся точками бесконечной кратности, может иметь единственную точку сгущения, равную нулю.

Отметим также, что кроме теоретического интереса, утверждение о симметрии спектра потенциала двойного слоя представляет практический интерес. Существует итерационные методы Чебышевского типа (см. [4, 5]), которые можно применять для решения интегральных уравнений теории потенциала. В этих методах требуется знать две границы спектра. В случае плоских областей достаточно находить лишь одну границу. Перечисленные теоремы иллюстрируют также эффективность применения рассмотренных здесь тождеств. Другие применения этих тождеств (в том числе в пространственном случае) даны в работах [1, 2, 3, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутрунов В. Н. Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 5. С. 864–868.
2. Кутрунов В. Н., Курята З. С. Некоторые интегральные тождества математической физики // Вестник ТюмГУ. 1998. № 2. С. 34–41.
3. Кутрунов В. Н., Курята З. С. Интегральные уравнения векторного поля // Известия вузов, сер. математика. 1999. № 6. С. 33–36.
4. Лебедев В. И. Чебышевские итерационные методы // В кн. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
5. Кутрунов В. Н. Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения линейных алгебраических уравнений // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33, № 1. С. 21–29.
6. Кутрунов В. Н., Кутрунова З. С. Интегральные тождества теории упругости и регуляризация сингулярных интегральных уравнений // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого девяностопятилетию со дня рождения А. А. Ильюшина. (Москва, 19–20 января 2006 г.). М.: ЛЕНАНД. С. 343–350.